CONCOURS PREMASTER EDHEC

LUNDI 13 JUILLET 2020

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{n+2}(u_{n+1} + u_n)$$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le 1$.

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \le \frac{2}{n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} \le \frac{4}{n(n+2)}$.

   b) Déduire de la question précédente que la série de terme général u_n est convergente.

3) Établir que la série de terme général $n\,u_n$ est convergente et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,u_n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme (à densité) sur $[a, a+1]$ et on note F sa fonction de répartition.

On rappelle qu'une densité de X est la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \le x \le a+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Vérifier que l'espérance et la variance de X sont données par : $E(X) = a + \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{12}$.

2) Déterminer l'expression de $F(x)$ selon la position de x par rapport aux nombres a et $a+1$.

Dans la suite, on suppose que le réel a est inconnu et on en propose deux estimateurs que l'on souhaite comparer du point de vue de leur performance asymptotique, ce qui sera précisé avant les cinquième et sixième questions.
Dans cette optique, on se donne un n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de variables aléatoires ($n \ge 2$), définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi que X, et mutuellement indépendantes.

3) On pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   a) Calculer l'espérance de Y_n.

   b) Définir une variable aléatoire $\widehat{Y_n}$, fonction affine de Y_n qui soit un estimateur sans biais de a.

   c) Déterminer la variance de Y_n, puis celle de $\widehat{Y_n}$.

4) On pose $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   a) On note F_n la fonction de répartition de M_n. Montrer que $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ (x-a)^n & \text{si } a \le x \le a+1 \\ 1 & \text{si } x > a+1 \end{cases}$.

   b) En déduire que M_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_n de M_n.

   c) Montrer que M_n possède une espérance et la calculer.

d) On pose $\widehat{M_n} = M_n - 1$. Montrer que $\widehat{M_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de a.

Définition et théorème

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$. On dit qu'un estimateur T_n de θ est de vitesse v_n si la suite $(v_n(T_n - \theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui n'est pas quasi-certainement nulle.

On admet le théorème suivant : si une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers R et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels tendant vers u, alors la suite $(u_n R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire uR.

On se propose de montrer que $\widehat{Y_n}$ est de vitesse $\sqrt{n}$ et que $\widehat{M_n}$ est de vitesse n, ce qui prouvera la supériorité de $\widehat{M_n}$ sur $\widehat{Y_n}$, du point de vue de sa vitesse de convergence.

5) a) On pose $\widehat{Y_n}^* = \dfrac{\widehat{Y_n} - E\left(\widehat{Y_n}\right)}{\sqrt{V\left(\widehat{Y_n}\right)}}$. Justifier que $\widehat{Y_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{2}\right)$, puis, en appliquant le théorème limite central, montrer que $\widehat{Y_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Montrer que $\widehat{Y_n}^* = \sqrt{12n}\left(\widehat{Y_n} - a\right)$, puis en déduire, en utilisant le théorème admis, que $\sqrt{n}\left(\widehat{Y_n} - a\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) Montrer par l'absurde que $\widehat{Y_n}$ n'est pas de vitesse n (on utilisera, ici aussi, le théorème admis).

6) a) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $P\left(n\left(\widehat{M_n} - a\right) \leq x\right) = 1$.

b) Montrer que, pour tout réel x négatif et pour tout entier naturel n suffisamment grand, on a l'égalité :

$$P\left(n\left(\widehat{M_n} - a\right) \leq x\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

c) Montrer que si Z suit la loi exponentielle de paramètre 1, alors la variable aléatoire $M = -Z$ a pour fonction de répartition : $F_M(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

d) Établir enfin que $n\left(\widehat{M_n} - a\right)$ converge en loi vers la variable aléatoire M.

Exercice 3

Ce problème propose l'étude de l'algorithme de Faddeev qui permet, entre autres, de déterminer un polynôme annulateur d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc aussi d'écrire l'inverse d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme un polynôme de cette matrice. On se place dans le cas particulier $n = 3$.

On rappelle que la trace d'une matrice carrée M est le réel noté $\mathrm{Tr}(M)$ égal à la somme des éléments diagonaux de M.

1) Question préliminaire

Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$ et $N = \left(n_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et a un réel quelconque.

a) Établir que : $\mathrm{Tr}(aM + N) = a\,\mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)$.

b) Montrer que $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

c) Montrer que si deux matrices sont semblables alors elles ont la même trace.

On considère dans toute la suite une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ayant 3 valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, λ_3 toutes différentes de 0, et on pose :

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

On considère le polynôme P défini par $P(X)=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ et on pose :

$$P(X)=X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$$

2) Vérifier que $a_0=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $a_1=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3$, $a_2=-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3$.

3) a) Montrer qu'il existe une matrice inversible Q telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=QD^nQ^{-1}$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur du réel $\mathrm{Tr}\left(A^n\right)$ en fonction de λ_1, λ_2 et λ_3.

c) Établir que $\mathrm{Tr}(A)=-a_2$ et $\mathrm{Tr}\left(A^2\right)=a_2^2-2a_1$.

Justifier que, pour tout i de $[\![1\,;3]\!]$, on a $\lambda_i^{\,3}=-a_2\lambda_i^{\,2}-a_1\lambda_i-a_0$, puis montrer que l'on a :

$$\mathrm{Tr}\left(A^3\right)=-a_2^3+3a_1a_2-3a_0$$

4) Montrer, par un calcul matriciel, que $P(D)=0$, puis en déduire $P(A)$.

5) On pose : $d_1=-\mathrm{Tr}(A)$ et $B_1=A+d_1I$.

$d_2=-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(B_1A)$ et $B_2=B_1A+d_2I$.

$d_3=-\dfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}(B_2A)$ et $B_3=B_2A+d_3I$.

a) Exprimer B_2 et B_3 comme combinaisons linéaires de I, A et A^2.

b) En déduire d_2 et d_3 en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}\left(A^2\right)$ et $\mathrm{Tr}\left(A^3\right)$.

6) a) Montrer que $d_1=a_2$, $d_2=a_1$ et $d_3=a_0$.

b) Utiliser alors l'une des définitions de P pour conclure que $B_3=0$.

7) a) Justifier que A est inversible.

b) Écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I, A et A^2, les coefficients étant exprimés à l'aide des réels d_1, d_2 et d_3.

8) Application : dans cette question, on suppose que $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&3&2\\0&1&3\end{pmatrix}$ et on garde les mêmes notations que dans les questions précédentes.

a) Vérifier que 1, 3 et 5 sont les valeurs propres de A.

b) En déduire les valeurs de $\mathrm{Tr}\left(A^2\right)$ et $\mathrm{Tr}\left(A^3\right)$.

c) Donner les valeurs de d_1, d_2, d_3 puis exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de I, A et A^2.

d) Calculer A^2 et en déduire explicitement A^{-1}.

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2020

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

CORRIGE

Exercice 1

1) a) Par récurrence : c'est vrai pour $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et si l'on suppose, pour un certain entier naturel n que c'est vrai pour u_n et u_{n+1}, alors on a $0 \le u_{n+1} + u_n \le 2$ d'où $0 \le u_{n+2} \le \dfrac{2}{n+2} \le 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le 1}$$

b) Comme $u_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}(u_{n+1} + u_n)$, on déduit de la question précédente que : $u_{n+2} \le \dfrac{2}{n+2}$, ce qui signifie que : $\forall n \ge 2$, $u_n \le \dfrac{2}{n}$. Ceci est encore vrai pour $n = 1$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \le \frac{2}{n}}$$

D'après les deux questions précédentes, on a, pour tout entier naturel n non nul : $0 \le u_n \le \dfrac{2}{n}$.

Par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

2) a) En injectant $u_n \le \dfrac{2}{n}$ et $u_{n+1} \le \dfrac{2}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dans l'égalité $u_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}(u_{n+1} + u_n)$, on obtient : $u_{n+2} \le \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{2}{n+1} + \dfrac{2}{n}\right) \le \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n}\right)$.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} \le \frac{4}{n(n+2)}}$$

b) On déduit de la question 2a) que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $u_n \le \dfrac{4}{n(n-2)}$.

La série de terme général $\dfrac{4}{n(n-2)}$ est convergente (car $\dfrac{4}{n(n-2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2}$ et la série de Riemann de paramètre 2 > 1 est convergente) donc par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de terme général u_n est convergente.

3) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)u_{k+2} = \sum_{k=0}^{n-2}(u_{k+1} + u_k) = \sum_{k=0}^{n-2}u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-2}u_k = \sum_{k=1}^{n-1}u_k + \sum_{k=0}^{n-2}u_k = \sum_{k=1}^{n-1}u_k + \sum_{k=1}^{n-2}u_k$, car $u_0 = 0$.

Ceci s'écrit encore (changement d'indice $i = k+2$) : $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} i\,u_i = \sum_{k=1}^{n-1}u_k + \sum_{k=1}^{n-2}u_k$.

En ajoutant le premier terme qui vaut 1 dans la somme de gauche, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{n} i\,u_i = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}u_k + \sum_{k=1}^{n-2}u_k$$

Les deux sommes de droite ont une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ donc on peut passer à la limite et on trouve : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} i\,u_i = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$.

Conclusion (en réindiçant) :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$$

Exercice 2

1) D'après le cours, si X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, sa fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Ici, on a donc : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{a+1-a} & \text{si } a \le x \le a+1 \\ 1 & \text{si } x > a+1 \end{cases}$, ce qui donne :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ x-a & \text{si } a \le x \le a+1 \\ 1 & \text{si } x > a+1 \end{cases}}$$

2) On doit savoir que, si X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, alors X possède une espérance et une variance données par : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ici, on obtient : $E(X) = \dfrac{2a+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(a+1-a)^2}{12}$, et en simplifiant :

$$\boxed{E(X) = a + \frac{1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{1}{12}}$$

3) a) On a $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ donc, par linéarité de l'espérance : $E(Y_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Comme X_1, X_2, ..., X_n ont même loi que X, leur espérance commune est celle de X qui vaut $a + \dfrac{1}{2}$, ce qui donne $E(Y_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{n} \times n \times \left(a + \dfrac{1}{2}\right)$.

Conclusion :

$$\boxed{E(Y_n) = a + \frac{1}{2}}$$

b) En posant $\widehat{Y_n} = Y_n - \dfrac{1}{2}$, on dispose bien d'un estimateur car $\widehat{Y_n}$ est fonction du seul échantillon (X_1, X_2, ..., X_n), et c'est une variable aléatoire indépendante de a. De plus, par linéarité de l'espérance, on a $E\left(\widehat{Y_n}\right) = E(Y_n) - \dfrac{1}{2} = a + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = a$.

Conclusion :

$$\boxed{\widehat{Y_n} \text{ est un estimateur sans biais de } a}$$

c) La variance de Y_n est donnée par : $V(Y_n)=\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V(X_k)=\dfrac{1}{n^2}\times n\times\dfrac{1}{12}$

On a donc :

$$\boxed{V(Y_n)=\frac{1}{12n}}$$

Comme $\widehat{Y_n}=Y_n-\dfrac{1}{2}$, on a aussi :

$$\boxed{V\left(\widehat{Y_n}\right)=\frac{1}{12n}}$$

4) a) On a $F_n(x)=P(M_n\le x)=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k\le x]\right)\overset{\text{ind}}{=}\prod_{k=1}^{n}P(X_k\le x)\overset{\text{même loi}}{=}F(x)^n$

On obtient donc :

$$\boxed{F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ (x-a)^n & \text{si } a\le x\le a+1\\ 1 & \text{si } x>a+1\end{cases}}$$

b) La fonction F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en a et $a+1$. De plus, elle est continue en a et $a+1$ sans problème donc M_n est une variable aléatoire à densité.
Une densité f_n de M_n est une fonction coïncidant avec la dérivée de F_n, sauf éventuellement en a et $a+1$ donc on peut choisir :

$$\boxed{f_n(x)=\begin{cases}n(x-a)^{n-1} & \text{si } a\le x\le a+1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

c) La variable M_n est bornée donc elle a une espérance : en effet, les intégrales $\int_{-\infty}^{a}f_n(x)\,dx$ et $\int_{a+1}^{+\infty}f_n(x)\,dx$ sont nulles et l'intégrale $\int_{a}^{a+1}f_n(x)\,dx$ est bien définie. Pour finir, on a :
$E(M_n)=\int_a^{a+1}f_n(x)\,dx=\int_a^{a+1}nx(x-a)^{n-1}\,dx=\int_0^1 n(t+a)t^{n-1}dt=\int_0^1 nat^{n-1}dt+\int_0^1 nt^n dt$.

On trouve alors : $E(M_n)=a\left[t^n\right]_0^1+n\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$.

Bilan :

$$\boxed{E(M_n)=a+\frac{n}{n+1}}$$

d) Par linéarité de l'espérance, on a : $E\left(\widehat{M_n}\right)=E(M_n)-1=a+\dfrac{n}{n+1}-1=a-\dfrac{1}{n+1}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}E\left(\widehat{M_n}\right)=a$ donc $\widehat{M_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de a.

5) a) On a $\widehat{Y_n}=Y_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\frac{1}{2}\right)$ et on peut appliquer le théorème limite central à la variable $\widehat{Y_n}$ car les variables $X_i-\frac{1}{2}$ sont mutuellement indépendantes sont de même loi et ont une espérance et une variance.

Ce théorème stipule que $\dfrac{\widehat{Y_n}-E\left(\widehat{Y_n}\right)}{\sqrt{V\left(\widehat{Y_n}\right)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'après les questions 2a) et 2c), on peut affirmer que $\widehat{Y_n}^{*}=\sqrt{12n}\left(\widehat{Y_n}-a\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire Y suivant la loi normale centrée réduite.

Le théorème admis permet d'écrire que $\sqrt{n}\left(\widehat{Y_n}-a\right)$ converge en loi vers la variable $\frac{1}{\sqrt{12}}Y$ qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{12}\right)$.

b) Si $\widehat{Y_n}$ était de vitesse n, alors $n\left(\widehat{Y_n}-a\right)$ convergerait en loi vers une variable aléatoire non quasi-certainement nulle et en multipliant par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0, on aurait $\sqrt{n}\left(\widehat{Y_n}-a\right)$ qui convergerait en loi vers la variable nulle, ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.

6) a) Comme M_n prend ses valeurs dans $[a\,,a+1]$ et comme $\widehat{M_n}=M_n-1$, alors $\widehat{M_n}$ prend des valeurs inférieures à a donc la variable $n\left(\widehat{M_n}-a\right)$ est négative et, ainsi :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ P\left(n\left(\widehat{M_n}-a\right)\leq x\right)=1}$$

b) Pour tout réel x négatif et pour tout entier naturel n, on a :

$$P\left(n\left(\widehat{M_n}-a\right)\leq x\right)=P\left(\widehat{M_n}-a\leq\frac{x}{n}\right)=P\left(\widehat{M_n}\leq a+\frac{x}{n}\right)=P\left(M_n\leq a+1+\frac{x}{n}\right)=F_n\left(a+1+\frac{x}{n}\right)$$

En remplaçant (avec la certitude que $a\leq a+1+\frac{x}{n}\leq a+1$ dès que n est assez grand, c'est-à-dire supérieur à $-x$), on obtient :

$$\boxed{P\left(n\left(\widehat{M_n}-a\right)\leq x\right)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

c) Comme $M=-Z$, on a déjà $F_M(x)=1$ si $x>0$.
De plus, pour tout réel x négatif, on a : $F_M(x)=P(M\leq x)=P(-Z\leq x)=P(Z\geq -x)=1-F_Z(-x)$
Comme $-x>0$, on obtient : $F_M(x)=1-\left(1-\mathrm{e}^{-(-x)}\right)=\mathrm{e}^x$. On a bien :

$$\boxed{F_M(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & \text{si } x\leq 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}}$$

d) Pour tout réel x négatif et tout entier naturel n supérieur à $-x$, on a $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$.

La grande parenthèse tend vers x car $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim} n\times\frac{x}{n}=x$ donc par continuité d'exp en x, on a

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$. On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(n\left(\widehat{M}_n-a\right)\leq x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & \text{si } x\leq 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}=F_M(x)$.

On en déduit que $n\left(\widehat{M}_n-a\right)$ converge en loi vers la variable aléatoire M.

Problème

1) a) En notant respectivement $m_{i,j}$ et $n_{i,j}$ les termes génériques des matrices M et N, on a successivement :

$$\mathrm{Tr}(aM+N)=\left(am_{1,1}+n_{1,1}\right)+\left(am_{2,2}+n_{2,2}\right)+\left(am_{3,3}+n_{3,3}\right).$$

$$\mathrm{Tr}(aM+N)=\left(am_{1,1}+am_{2,2}+am_{3,3}\right)+\left(n_{1,1}+n_{2,2}+n_{3,3}\right)$$

$$\mathrm{Tr}(aM+N)=a\left(m_{1,1}+m_{2,2}+m_{3,3}\right)+\left(n_{1,1}+n_{2,2}+n_{3,3}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(aM+N)=a\,\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Tr}(N)}$$

b) • Avec les mêmes notations, on a :

$$MN=\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3}\\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3}\\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3}\\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3}\\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3}\end{pmatrix}$$

$$MN=\begin{pmatrix} m_{1,1}n_{1,1}+m_{1,2}n_{2,1}+m_{1,3}n_{3,1} & \times & \times\\ \times & m_{2,1}n_{1,2}+m_{2,2}n_{2,2}+m_{2,3}n_{3,2} & \times\\ \times & \times & m_{3,1}n_{1,3}+m_{3,2}n_{2,3}+m_{3,3}n_{3,3}\end{pmatrix}$$

On obtient donc : $\mathrm{Tr}\,(MN)=m_{1,1}n_{1,1}+m_{1,2}n_{2,1}+m_{1,3}n_{3,1}+m_{2,1}n_{1,2}+m_{2,2}n_{2,2}+m_{2,3}n_{3,2}$

$+\,m_{3,1}n_{1,3}+m_{3,2}n_{2,3}+m_{3,3}n_{3,3}$

De même : $NM=\begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3}\\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3}\\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3}\\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3}\\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{pmatrix}$

$$NM=\begin{pmatrix} n_{1,1}m_{1,1}+n_{1,2}m_{2,1}+n_{1,3}m_{3,1} & \times & \times\\ \times & n_{2,1}m_{1,2}+n_{2,2}m_{2,2}+n_{2,3}m_{3,2} & \times\\ \times & \times & n_{3,1}m_{1,3}+n_{3,2}m_{2,3}+n_{3,3}m_{3,3}\end{pmatrix}$$

On obtient cette fois :

$\mathrm{Tr}\,(NM)=n_{1,1}m_{1,1}+n_{1,2}m_{2,1}+n_{1,3}m_{3,1}+n_{2,1}m_{1,2}+n_{2,2}m_{2,2}+n_{2,3}m_{3,2}$

$+\,n_{3,1}m_{1,3}+n_{3,2}m_{2,3}+n_{3,3}m_{3,3}$

À l'ordre des termes près, on constate que :

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(NM)=\mathrm{Tr}\,(MN)}$$

• Si une matrice A est semblable à une matrice B, il existe une matrice inversible P telle que : $A = PBP^{-1}$ (ou $B = P^{-1}AP$).

Dès lors, on peut écrire (la deuxième égalité provient de la première question avec $N = PB$ et $M = P^{-1}$) :

$$\mathrm{Tr}\ (A) = \mathrm{Tr}\ \left((PB)P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\ \left(P^{-1}(PB)\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(P^{-1}P\right)B\right) = \mathrm{Tr}(B)$$

2) En développant et ordonnant $P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$, on obtient :

$$P(X) = X^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Par identification des coefficients avec $P(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, on trouve :

$$\boxed{a_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\ a_1 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3,\ a_2 = -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}$$

3) a) Comme A possède trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et ainsi, il existe une matrice inversible Q telle que : $A = QDQ^{-1}$.

On montre la formule demandée par récurrence.

• Pour $n = 0$, on a : $QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I = A^0$.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel fixé que $A^n = QD^nQ^{-1}$, alors :

$$A^{n+1} = A^nA = \left(QD^nQ^{-1}\right)\left(QD\ Q^{-1}\right) = QD^n\left(Q^{-1}Q\right)D\ Q^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A^n = QD^nQ^{-1}}$$

b) La relation précédente prouve que les matrices A^n et D^n sont semblables donc, d'après la première question, elles ont même trace.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{Tr}\left(A^n\right) = \mathrm{Tr}\left(D^n\right)}$$

c) • Pour $n = 1$, la relation précédente donne : $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$ et comme $\mathrm{Tr}\ (D) = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, alors d'après la question 2), on obtient :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = -a_2}$$

• Pour $n = 2$, la relation précédente donne $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \mathrm{Tr}\left(D^2\right)$, et comme $\mathrm{Tr}\left(D^2\right) = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$, alors toujours d'après la question 2), on obtient :

$$\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$$

Par ailleurs, on a :

$a_2^2 - 2a_1 = (-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)$.

$a_2^2 - 2a_1 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3)$.

En développant le carré, on trouve : $a_2^2 - 2a_1 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Tr}\ \left(A^2\right) = a_2^2 - 2a_1}$$

• Pour $n=3$ la relation précédente donne : $\text{Tr}\left(A^3\right)=\text{Tr}\left(D^3\right)$ et comme $\text{Tr}\left(D^3\right)=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$, alors toujours d'après la question 2), on obtient :

$$\text{Tr}\left(A^3\right)=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$$

Par ailleurs, on a :

$-a_2^3+3a_1a_2-3a_0=-\left(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\right)^3+3\left(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\right)\left(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\right)+3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Grâce à la règle des signes, on a :

$-a_2^3+3a_1a_2-3a_0=\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)^3-3\left(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\right)\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)+3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

En développant avec précaution et en arrangeant, on trouve :

- $\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)^3=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+3\lambda_1^2\lambda_2+3\lambda_2^2\lambda_3+3\lambda_1\lambda_3^2+3\lambda_1\lambda_2^2+3\lambda_1^2\lambda_3+3\lambda_2\lambda_3^2+6\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.
- $-3\left(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\right)\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)=-3\lambda_1^2\lambda_2-3\lambda_1\lambda_2^2-3\lambda_2^2\lambda_3-3\lambda_2\lambda_3^2-3\lambda_1^2\lambda_3-3\lambda_1\lambda_3^2-9\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

On obtient donc : $-a_2^3+3a_1a_2-3a_0=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Tr}\left(A^3\right)=-a_2^3+3a_1a_2-3a_0}$$

4) On a $P(D)=\left(D-\lambda_1I\right)\left(D-\lambda_2I\right)\left(D-\lambda_3I\right)$ et on a aussi :

$$D-\lambda_1I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda_2-\lambda_1&0\\0&0&\lambda_3-\lambda_1\end{pmatrix},\ D-\lambda_2I=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_2&0&0\\0&0&0\\0&0&\lambda_3-\lambda_2\end{pmatrix}\text{ et }D-\lambda_3I=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_3&0&0\\0&\lambda_2-\lambda_3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\left(D-\lambda_1I\right)\left(D-\lambda_2I\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda_2-\lambda_1&0\\0&0&\lambda_3-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_2&0&0\\0&0&0\\0&0&\lambda_3-\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\left(\lambda_3-\lambda_1\right)\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\end{pmatrix}$$

Pour finir, on a :

$$\left(D-\lambda_1I\right)\left(D-\lambda_2I\right)\left(D-\lambda_3I\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\left(\lambda_3-\lambda_1\right)\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_3&0&0\\0&\lambda_2-\lambda_3&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(D)=0}$$

Par ailleurs, on a aussi :

$P(A)=A^3+a_2A^2+a_1A+a_0I=QD^3Q^{-1}+a_2QD^2Q^{-1}+a_1QDQ^{-1}+a_0I$

On a donc :

$$P(A)=QD^3Q^{-1}+a_2QD^2Q^{-1}+a_1QDQ^{-1}+a_0QIQ^{-1}$$

Grâce aux propriétés du calcul matriciel, on en déduit :

$$P(A)=Q\left(D^3+a_2D^2+a_1D+a_0I\right)Q^{-1}$$

Comme la matrice entre parenthèses est nulle, on conclut :

$$\boxed{P(A)=0}$$

5) a) On a : $B_2 = B_1 A + d_2 I = (A + d_1 I)A + d_2 I$.

$$\boxed{B_2 = A^2 + d_1 A + d_2 I}$$

On a : $B_3 = B_2 A + d_3 I = (A^2 + d_1 A + d_2 I)A + d_3 I$

$$\boxed{B_3 = A^3 + d_1 A^2 + d_2 A + d_3 I}$$

b) • Par définition de B_1 et de d_2, on a :

$d_2 = -\frac{1}{2}\text{Tr}(B_1 A) = -\frac{1}{2}\text{Tr}(A^2 + d_1 A)$.

On en déduit, grâce à la question 1b) : $d_2 = -\frac{1}{2}\text{Tr}(A^2) - \frac{d_1}{2}\text{Tr}(A)$

Comme $d_1 = -\text{Tr}(A)$, on trouve :

$$\boxed{d_2 = -\frac{1}{2}\text{Tr}(A^2) + \frac{1}{2}(\text{Tr}(A))^2}$$

• Par définition de B_2 et de d_3, on a :

$$d_3 = -\frac{1}{3}\text{Tr}(B_2 A) = -\frac{1}{3}\text{Tr}(B_1 A^2 + d_2 A) = -\frac{1}{3}\text{Tr}(A^3 + d_1 A^2 + d_2 A)$$

On en déduit, toujours avec la question 1b) :

$$d_3 = -\frac{1}{3}\text{Tr}(A^3) - \frac{d_1}{3}\text{Tr}(A^2) - \frac{d_2}{3}\text{Tr}(A)$$

Comme $d_1 = -\text{Tr}(A)$ et $d_2 = -\frac{1}{2}\text{Tr}(A^2) + \frac{1}{2}(\text{Tr}(A))^2$, on trouve :

$$d_3 = -\frac{1}{3}\text{Tr}(A^3) + \frac{1}{3}\text{Tr}(A)\text{Tr}(A^2) + \frac{1}{6}\text{Tr}(A^2)\text{Tr}(A) - \frac{1}{6}(\text{Tr}(A))^3$$

Finalement, on a :

$$\boxed{d_3 = -\frac{1}{3}\text{Tr}(A^3) + \frac{1}{2}\text{Tr}(A)\text{Tr}(A^2) - \frac{1}{6}(\text{Tr}(A))^3}$$

6) a) • D'après la question 3c), on sait que $\text{Tr}(A) = -a_2$ et, par définition, on a $d_1 = -\text{Tr}(A)$, donc :

$$\boxed{d_1 = a_2}$$

• Toujours d'après la question 3c), on sait que $\text{Tr}(A^2) = a_2^2 - 2a_1$ et, d'après la question 5b), on a $d_2 = -\frac{1}{2}\text{Tr}(A^2) + \frac{1}{2}(\text{Tr}(A))^2$ donc :

$d_2 = -\frac{1}{2}(a_2^2 - 2a_1) + \frac{1}{2}a_2^2$.

Après simplification, on a :

$$\boxed{d_2 = a_1}$$

• Une fois encore, d'après la question 3c), on a $\text{Tr}\left(A^3\right)=-a_2^3+3a_1a_2-3a_0$ et, d'après la question 5b), on a $d_3=-\frac{1}{3}\text{Tr}\left(A^3\right)+\frac{1}{2}\text{Tr}(A)\text{Tr}\left(A^2\right)-\frac{1}{6}(\text{Tr}(A))^3$ donc :

$$d_3=-\frac{1}{3}\left(-a_2^3+3a_1a_2-3a_0\right)+\frac{1}{2}(-a_2)\left(a_2^2-2a_1\right)-\frac{1}{6}(-a_2)^3$$

Après simplification, on a :

$$\boxed{d_3=a_0}$$

b) On sait que $B_3=A^3+d_1A^2+d_2A+d_3I$ et, en remplaçant grâce à la question 6a), on obtient : $B_3=A^3+a_2A^2+a_1A+a_0I=P(A)$

Comme $P(A)=0$, on en déduit :

$$\boxed{B_3=0}$$

7) a) Les valeurs propres de A sont toutes différentes de 0 donc A est inversible.

b) La relation $P(A)=0$ s'écrit : $A^3+a_2A^2+a_1A+a_0I=0$.

En arrangeant un peu, on en déduit :

$$\left(A^2+a_2A+a_1I\right)A=-a_0I$$

Comme les valeurs propres de A sont différentes de 0, leur produit est aussi différent de 0 et, comme $a_0=-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, on a : $a_0\neq 0$

Dès lors, on peut écrire :

$$\frac{-1}{a_0}\left(A^2+a_2A+a_1I\right)A=I$$

On peut conclure :

$$A^{-1}=\frac{-1}{a_0}\left(A^2+a_2A+a_1I\right)$$

Comme $d_1=a_2$, $d_2=a_1$ et $d_3=a_0$, on a finalement :

$$\boxed{A^{-1}=\frac{-1}{d_3}\left(A^2+d_1A+d_2I\right)}$$

8) a) On a :

$A-I=\begin{pmatrix}2&1&0\\2&2&2\\0&1&2\end{pmatrix}$: $C_1+C_3=2C_2$ donc $A-I$ n'est pas inversible et 1 est valeur propre de A.

$A-3I=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$: $C_1=C_3$ donc $A-3I$ n'est pas inversible et 3 est valeur propre de A.

$A-5I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\2&-2&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$: $C_1+C_3=-2C_2$ donc $A-5I$ n'est pas inversible et 5 est valeur propre de A.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } 1,\ 3 \text{ et } 5}$$

b) Il faut se souvenir que :

- D'une part : $a_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $a_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$, $a_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$
- D'autre part : $\mathrm{Tr}(A) = -a_2$, $\mathrm{Tr}(A^2) = a_2^2 - 2a_1$ et $\mathrm{Tr}(A^3) = -a_2^3 + 3a_1a_2 - 3a_0$.

D'après le premier point, on a : $a_0 = -15$, $a_1 = 23$, $a_2 = -9$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 9,\ \mathrm{Tr}(A^2) = 35 \text{ et } \mathrm{Tr}(A^3) = -261}$$

c) Comme $d_1 = a_2$, $d_2 = a_1$ et $d_3 = a_0$, on a :

$$\boxed{d_3 = -15,\ d_2 = 23,\ d_1 = -9}$$

D'après la question 7b), on sait que : $A^{-1} = \dfrac{-1}{d_3}\left(A^2 + d_1A + d_2I\right)$. En remplaçant, on obtient :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{15}\left(A^2 - 9A + 23I\right)}$$

d) On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 2 \\ 12 & 13 & 12 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

On en déduit :

$$A^2 - 9A + 23I = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 2 \\ 12 & 13 & 12 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 23\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 9 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 9 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}}$$

Vérification : on effectue le produit de A par A^{-1} :

$$AA^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 9 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

On a bien :

$$\boxed{AA^{-1} = I}$$

EDHEC BUSINESS SCHOOL

CONCOURS PREMASTER EDHEC

RAPPORT DE CORRECTION 2020 :

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif (des questions faciles mais aussi des questions très difficiles) tout en respectant scrupuleusement le programme.

• L'exercice 1, portant sur le programme d'analyse, proposait l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{n+2}(u_{n+1} + u_n)$$

On s'intéressait à la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum n u_n$.

• L'exercice 2, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif principal d'étudier deux suites de variables aléatoires, fonctions d'un échantillon d'une loi uniforme sur $[a, a+1]$ et de tester leur efficacité dans l'estimation ponctuelle du paramètre a, du point de vue de leur vitesse de convergence, cette dernière ayant été définie dans l'énoncé.

• L'exercice 3, portant sur le programme d'algèbre déclinait l'algorithme de Faddeev dans le cas particulier d'une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ayant 3 valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, λ_3 toutes non nulles.
Cet algorithme permet de déterminer simplement le polynôme caractéristique ainsi que la matrice inverse de A par de simples produits matriciels et des calculs de traces.

Statistiques.
Pour les 352 candidats ayant composé :

- La moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,99 sur 20.
- L'écart-type est égal à 3,60.
- La médiane est, quant à elle, égale à 11.
- 4,3 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4, ce qui représente 2 points de moins que l'année dernière).
- 42,6 % des candidats ont entre 8 et 12 (18,7 points de plus que l'année dernière).
- 2,3 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (soit 8 candidats).

Analyse des copies.
Les correcteurs notent que le niveau est bien consolidé, les candidats formant un groupe bien plus homogène que par le passé, même si l'on trouve, d'un côté, quelques très brillants candidats ayant des connaissances bien supérieures à celles exigées par le programme, et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés ayant des notes extrêmement basses (ces candidats connaissent souvent mal les concepts et ne les maîtrisent donc pas du tout), les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable, tout en regrettant que de très nombreux candidats, certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve, aient fait l'impasse sur les probabilités.

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants pour lesquels elle est mise à mal :

Exercice 1
- Proposer un raisonnement par récurrence simple sur une suite dont un terme dépend des deux précédents n'est pas vraiment adapté.
- Passer de l'inégalité $u_{n+2} \leq \frac{2}{n+2}$, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, à l'inégalité $u_n \leq \frac{4}{n}$, en donnant cette dernière inégalité valable pour tout n de $\mathbb{N}^*$, est une petite hérésie (elle n'est valable, a priori, que pour $n \geq 2$).
- Affirmer que, puisque la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum n u_n$ converge aussi, est un peu choquant.

Exercice 2
- Il y eu beaucoup de confusions entre la loi uniforme à densité et la loi uniforme discrète !
- Quelques candidats ne connaissent pas le vocabulaire de l'estimation.
- Beaucoup trichent sur la détermination des fonctions de répartition demandées.

Exercice 3
- Il y a eu pas mal de fautes au sujet de la trace d'une matrice carrée et des propriétés que l'on demandait d'établir à son sujet.
- Ce n'est pas parce que le polynôme $(X-1)(X-3)(X-5)$ annule A que 1, 3, et 5 sont **les** valeurs propres de A : il manque un argument.
- Il était dommage de commettre de grosses fautes de calcul sur certaines questions faciles.

Conclusion.
L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.
Pour terminer, les correcteurs rappellent que les candidats doivent s'en tenir strictement aux termes du programme de cette épreuve (disponible sur le site de l'EDHEC).