Concours **EDHEC** **2010**
Classes Préparatoires

MATHEMATIQUES

Option Scientifique

Vendredi 7 mai 2010 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_n définie, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de l'ouvert $U =]0, +\infty[^n$, par :

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right).$$

1) Montrer que f_n est de classe C^2 sur U.

2) Montrer que f_n possède une infinité de points critiques $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et les déterminer.

3) a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f_n.
b) Vérifier que la hessienne H_n de f_n en un point critique quelconque de f_n est proportionnelle à la matrice $K_n = n\,I_n - J_n$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

4) a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
b) Vérifier que le vecteur v_n, élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont tous les éléments sont égaux à 1, est un vecteur propre de J_n.
c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n, puis celles de K_n.
d) Montrer que l'on ne peut pas, de cette façon, conclure à l'existence d'un extremum local de f_n sur U.

5) Étude du cas $n = 2$
a) Comparer les réels $(x_1 + x_2)^2$ et $4\,x_1\,x_2$.
b) En déduire que f_2 admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un minimum global et donner sa valeur.

6) Étude du cas général.
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur U, égal à n^2.

Exercice 2

On se place dans un espace euclidien E de dimension n, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté (x / y) et la norme de x est notée $\| x \|$.
On désigne par Id l'endomorphisme identique de E.
On considère un vecteur u de E dont la norme est égale à 1, un réel λ non nul et on note f_λ l'application qui, à tout vecteur x de E associe $f_\lambda(x) = \lambda (x / u) u + x$.

1) Donner la dimension de $(\text{vect}(u))^\perp$.

2) Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

3) Montrer que le polynôme $X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1)$ est un polynôme annulateur de f_λ.

4) a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E.
   b) Déterminer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour tout vecteur v de $(\text{vect}(u))^\perp$.
   c) Établir alors que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.

5) Dans cette question on suppose que $\lambda = -1$.
   a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur.
   b) Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $(\text{vect}(u))^\perp$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.
On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer une densité de $-Y$.
   b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2) a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.
   b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4) Simulation informatique.
On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z.

```
Function z (a : real) : real ;
```

```
Var    x, y : real ;
Begin
x : = ------ ; y : = ------ ; z : = ------ ;
End ;
```

Problème

Préliminaire : un résultat utile pour la partie 2.

1) a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2) Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Partie 1 : convergence complète.

1) Soit une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
On suppose que la suite (X_n) converge complètement vers X, c'est-à-dire que, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P(\,|X_n - X\,| \geq \varepsilon\,)$ est convergente.
Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X.

2) On se propose dans cette question d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.
Pour ce faire, on considère une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{n}$

a) Déterminer la probabilité $P(Y_n \geq 1)$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.

d) Utiliser la valeur de $P(Y_n \geq 1)$ pour en déduire que la suite (Y_n) ne converge pas complètement vers la variable aléatoire certaine nulle.

Partie 2 : étude d'un exemple.

Dans cette partie, on considère une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et telles que, pour tout entier naturel k non nul, B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. On suppose que les variables aléatoires B_k sont deux à deux indépendantes.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k$ et $Z_n = \dfrac{S_n}{E(S_n)}$ et on admet que les variables aléatoires S_n et Z_n sont, elles aussi, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose, dans les questions 1) et 2), de montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1 et, dans les questions suivantes, de montrer que la suite (Z_n) converge complètement vers cette même variable.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, donner sous forme de sommes les expressions de $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
 b) Vérifier que $V(S_n) \leq E(S_n)$.

2) a) Montrer que $P(\,|Z_n - 1| \geq \varepsilon\,) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}$.
 b) Établir que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

3) À l'aide de l'inégalité établie à la question 2a) de cette même partie, montrer que la série de terme général $P(\,|Z_{n^4} - 1| \geq \varepsilon\,)$ est convergente.

4) On désigne par e_n la partie entière de $n^{\frac{1}{4}}$, et on a donc : $e_n^4 \leq n < (e_n + 1)^4$.
 a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leq Z_n \leq \dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}$.
 b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \leq Z_n \leq \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4}$.

5) a) Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} = 1$.
 b) En déduire que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :

$$\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leq 1 + \varepsilon \;\text{ et }\; \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \geq \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$$

 c) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :
 $(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset (\, Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2\,)$ et $(Z_n \geq 1 + \varepsilon) \subset (\, Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\,)$.
 d) En déduire alors que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :

$$P(\,|Z_n - 1| \geq \varepsilon\,) \leq P(\,|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\,) + P(\,|Z_{e_n^4} - 1| \geq \varepsilon^2\,).$$

 e) Conclure qu'effectivement, la suite (Z_n) converge complètement vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

Option S

Corrigé
EDHEC 2010

Exercice 1 ....

1) La fonction f est le produit d'une fonction polynomiale par une somme de fonctions rationnelles bien définies sur U donc f est de classe C^2 sur U.

2) Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{x_j} - \dfrac{1}{x_i^{\,2}}(\sum_{j=1}^{n}x_j)$.

Les points critiques de f sont les points en lesquels le gradient de f est nul, c'est-à-dire les points $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ solutions de :

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j} - \dfrac{1}{a_i^{\,2}}(\sum_{j=1}^{n}a_j) = 0.$

On en déduit : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_i^{\,2} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}a_j}{\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}}$ $\qquad (S)$

Comme les a_i sont positifs, on a :

$$(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}a_j}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}}.$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1$, pour tout i élément de $\{2, 3, \ldots, n\}$, on trouve : $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{2, \ldots, n\},\ a_i = a_1$ et $a_1 = \sqrt{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}a_j}{\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_j}}}$.

En remplaçant dans la dernière équation tous les a_i par a_1, on obtient : $a_1 = a_1$.

Pour terminer : $(S) \Leftrightarrow \forall i \in \{2, \ldots, n\},\ a_i = a_1$.

$\boxed{\text{Les points critiques de } f \text{ sont les } n\text{-uplets } (a, \ldots, a) \text{ avec } a \in\ ]0, +\infty[}$

3) a) Les dérivées secondes de f sont :

• Pour $j \neq i$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,...,x_n) = -\dfrac{1}{x_j^{\,2}} - \dfrac{1}{x_i^{\,2}}$.

• $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}(x_1,...,x_n) = -\dfrac{1}{x_i^{\,2}} + \dfrac{2}{x_i^{\,3}} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j - \dfrac{1}{x_i^{\,2}} = 2\,\dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j - x_i}{x_i^{\,3}}$.

b) En les points critiques $(a, ..., a)$, on obtient :

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a,...,a) = -\dfrac{2}{a^2}$.

$\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, j \neq i$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}(a,...,a) = \dfrac{2(n-1)}{a^2}$.

Par définition, la hessienne de f en $(a, ..., a)$ est la matrice H_n dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a, ..., a)$, on a donc :

$$H_n = \frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & \ddots & (-1) & \\ & (-1) & \ddots & \\ & & & n-1 \end{pmatrix} = \frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} n & & & \\ & \ddots & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix} - \frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & \ddots & (1) & \vdots \\ & (1) & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci confirme bien que :

$$\boxed{H_n = \frac{2}{a^2} K_n, \text{ avec } K_n = n\, I_n - J_n}$$

4) a) Les colonnes de J_n sont toutes égales et non nulles donc $\mathrm{rg}(J_n) = 1$. Ceci prouve que J_n n'est pas inversible (car J_n est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $n \geq 2$), c'est-à-dire que 0 est valeur propre de J_n, associée à un sous-espace propre qui est de dimension $n-1$ (grâce à la formule du rang). En effet, en considérant J_n comme la matrice d'un endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}^n$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{rg}(\varphi_n) = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(\varphi_n) = n-1$, puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

b) $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) L'égalité écrite ci-dessus montre que n est valeur propre de J_n associée à un sous-espace propre de dimension au moins égale à 1.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de J_n ne peut pas excéder n, on est certain que :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J_n \text{ sont } 0 \text{ et } n}$$

Remarque : on pouvait obtenir ceci grâce au polynôme $X^2 - nX$ qui annule J_n.

Pour finir, la matrice J_n étant diagonalisable (symétrique réelle), il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D_n = \text{diag}(0, ..., 0, n)$ telle que :

$$J_n = P D_n P^{-1}.$$

Comme $K_n = n I_n - J_n$, on peut alors écrire :

$K_n = n P I_n P^{-1} - P D_n P^{-1} = P(n I_n - D_n) P^{-1}$.

Les éléments diagonaux de la matrice diagonale $nI_n - D_n$ sont donc les valeurs propres de K_n, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } K_n \text{ sont } n \text{ et } 0}$$

d) Les valeurs propres de H_n sont donc 0 et $\dfrac{2}{a^2} n$ qui sont toutes les deux positives, mais pas strictement positives : on est donc dans le cas où l'on ne peut pas conclure à l'existence ou non d'un extremum local en l'un des points critiques.

5) a) $(x_1 + x_2)^2 - 4 x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

On a donc :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 + x_2)^2 \geq 4 x_1 x_2}$$

b) On a $f_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right) = \dfrac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2}$.

Comme x_1 et x_2 appartiennent à $]0, +\infty[$, l'inégalité de 5a) donne, en divisant par $x_1 x_2 > 0$: $\dfrac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} \geq 4$. Comme $f_2(a, a) = 4$, la valeur 4 est donc atteinte par f_2 et on peut conclure :

$$\boxed{f_2 \text{ possède un minimum global sur } U \text{ et ce minimum vaut } 4}$$

6) Soit $X_n = \left(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, ..., \sqrt{x_n}\right)$ et $Y_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{x_2}}, ..., \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.

En notant $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à X_n et Y_n donne : $\langle X_n, Y_n \rangle^2 \leq \| X_n \|^2 \, \| Y_n \|^2$.

Comme $\langle X_n, Y_n \rangle = n$, comme $\| X_n \|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et comme $\| Y_n \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$, on obtient $n^2 \le (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i})$, ce qui s'écrit : $n^2 \le f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ admet } n^2 \text{ comme minimum global sur } U}$$

Exercice 2 ....

1) Comme u est non nul (il est de norme 1), on sait que vect (u) est un sous-espace vectoriel de dimension 1. De plus, on sait que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a : $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\dim(\text{vect}(u))^{\perp} = n-1}$$

2) Soit x et y deux vecteurs de E et a un réel.
On a : $f_\lambda(x + ay) = \lambda(x + ay \mid u)u + x + ay$.
Par linéarité à gauche du produit scalaire, on obtient :
$f_\lambda(x + ay) = \lambda(x \mid u)u + \lambda a(y \mid u)u + x + ay$.
$f_\lambda(x + ay) = \lambda(x \mid u)u + x + a(\lambda(y \mid u)u + y)$.
On a bien : $f_\lambda(x + ay) = f_\lambda(x) + af_\lambda(y)$, ce qui montre que f_λ est linéaire.
De plus, pour tout x de E, $f_\lambda(x)$ est combinaison linéaire de u et de x qui sont 2 vecteurs de E, par conséquent : $f_\lambda(x) \in E$.
On peut conclure :

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme de } E}$$

3) Pour tout x de E, on a : $f_\lambda^2(x) = (f_\lambda \circ f_\lambda)(x) = f_\lambda(f_\lambda(x)) = \lambda(f_\lambda(x) \mid u)u + f_\lambda(x)$.
Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a :
$(f_\lambda(x) \mid u) = (\lambda(x \mid u)u + x \mid u) = \lambda(x \mid u)(u \mid u) + (x \mid u)$.
Comme $(u \mid u) = \|u\|^2 = 1$, il reste : $(f_\lambda(x) \mid u) = (\lambda+1)(x \mid u)$.
On en déduit : $f_\lambda^2(x) = \lambda(\lambda+1)(x \mid u)u + f_\lambda(x)$.
$f_\lambda^2(x) = \lambda(\lambda+1)(x \mid u)u + \lambda(x \mid u)u + x = \lambda(\lambda+2)(x \mid u)u + x$.
On peut alors écrire :
$f_\lambda^2(x) = (\lambda+2)\big(\lambda(x \mid u)u + x\big) - (\lambda+1)x$.
Et enfin, on trouve : $f_\lambda^2(x) = (\lambda+2)f_\lambda(x) - (\lambda+1)x$.
Ceci étant valable pour tout x de E, on a : $f_\lambda^2 = (\lambda+2)f_\lambda - (\lambda+1)Id$.
On a bien établi que :

$$\boxed{X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1) \text{ est un polynôme annulateur de } f_\lambda}$$

4) a) Pour tout couple de vecteurs (x, y) éléments de E, on a :
$(f_\lambda(x) \mid y) = (\lambda (x \mid u) u + x \mid y) = \lambda (x \mid u)(u \mid y) + (x \mid y)$.
$(x \mid f_\lambda(y)) = (x \mid (\lambda (y \mid u) u + y) = \lambda (y \mid u)(x \mid u) + (x \mid y)$
$(x \mid f_\lambda(y)) = \lambda (x \mid u)(y \mid u) + (x \mid y)$.
La symétrie du produit scalaire permet de conclure que : $(f_\lambda(x) \mid y) = (x \mid f_\lambda(y))$.

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$$

b) Par définition de f_λ, on a : $f_\lambda(u) = \lambda (u \mid u) u + u = \lambda u + u$.
On a donc :

$$\boxed{f_\lambda(u) = (\lambda + 1) u}$$

Pour tout vecteur v de $(\text{vect}(u))^\perp$, on a : $f_\lambda(v) = \lambda (v \mid u) u + v = 0\, u + v$.
On a donc :

$$\boxed{f_\lambda(v) = v}$$

c) Comme u est non nul, la première égalité obtenue à la question 4b) prouve que $\lambda + 1$ est une valeur propre de f_λ associée à un sous-espace propre, noté $E_{\lambda+1}$, contenant $\text{vect}(u)$, donc au moins de dimension 1.
Comme $(\text{vect}(u))^\perp$ n'est pas réduit au vecteur nul (car sa dimension vaut $n-1$), il existe donc un vecteur v **non nul**, élément de $(\text{vect}(u))^\perp$, tel que $f_\lambda(v) = v$ (question 4b), ce qui prouve que 1 est une valeur propre de f_λ associée à un sous-espace propre, noté E_1, contenant $(\text{vect}(u))^\perp$, donc au moins de dimension $(n-1)$.
Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas dépasser n, on peut conclure que $E_{\lambda+1} = \text{vect}(u)$ et $E_1 = (\text{vect}(u))^\perp$.
Il n'y a bien sûr pas d'autres valeurs propres que 1 et $\lambda + 1$, puisque l'on a :
$\dim(\text{vect}(u)) + \dim(\text{vect}(u))^\perp = \dim E$.
Conclusion : $\lambda + 1$ et 1 sont les valeurs propres de f_λ associées respectivement aux sous-espaces propres $\text{vect}(u)$ et $(\text{vect}(u))^\perp$.

Remarque : pour montrer que 1 et $\lambda + 1$ sont les seules valeurs propres de f_λ, on pouvait utiliser le polynôme annulateur exhibé à la question 3).

5) a) En appliquant le résultat de la question 3) avec $\lambda = -1$, on trouve que :
$f_{-1}^2 = f_{-1}$, ce qui signifie :

$$\boxed{f_{-1} \text{ est un projecteur}}$$

b) D'après le cours sur les projecteurs, on sait que $\text{Im} f_{-1}$ est le sous-espace propre de f_{-1} associé à la valeur propre 1. On a donc :

$$\boxed{\text{Im} f_{-1} = (\text{vect}(u))^\perp}$$

On sait aussi que Ker f_{-1} est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
On a donc :

$$\boxed{\text{Ker } f_{-1} = \text{vect}\,(u)}$$

On constate que Ker f_{-1} et Im f_{-1} sont supplémentaires orthogonaux.
Par conséquent :

$$\boxed{f_{-1} \text{ est le projecteur orthogonal sur } (\text{vect}\,(u))^{\perp}}$$

Exercice 3..

1) a) On remarque que $-Y(\Omega) =]-a, 0]$ et, pour tout x de $]-a, 0]$, on a :
$(-Y \leq x) = (Y \geq -x)$.
En notant F_{-Y} la fonction de répartition de $-Y$, on peut écrire :
$\forall x \in]-a, 0],\ F_{-Y}(x) = P(Y \geq -x) = 1 - F_Y(-x)$.
Comme on a admis que $-Y$ est une variable aléatoire à densité, on peut dériver (sauf en 0) et, en posant $f_{-Y}(0) = \dfrac{1}{a}$, on obtient une densité de $-Y$:

$$\boxed{f_{-Y}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \text{ si } x \in]-a, 0] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

b) On sait que $X - Y$ est une variable aléatoire à densité comme différence de deux variables à densité.
Comme X et $-Y$ sont indépendantes et comme f_X est bornée (f_{-Y} l'est aussi d'ailleurs), une densité de $X - Y$ est la fonction g, définie par le produit de convolution de f_X et f_{-Y} :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\, f_{-Y}(t)\, dt\ .$$

• Par indépendance de X et Y, on est sûr que $(X - Y)(\Omega) =]-a, a[$, donc :
$\forall x \notin]-a, a[,\ g(x) = 0$.
• Pour tout x de $]-a, a[$, on a l'équivalence suivante :

$$f_X(x-t)\, f_{-Y}(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x - t \leq a \\ -a \leq t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Max}\,(x-a, -a) \leq t \leq \text{Min}\,(0, x).$$

Ensuite, la discussion se fait assez naturellement.
(1) Soit x est positif et on a :
$\text{Max}\,(x-a, -a) = x - a$, $\text{Min}\,(0, x) = 0$ et $g(x) = \displaystyle\int_{x-a}^{0} \frac{1}{a^2}\, dt = \frac{a-x}{a^2}$).

(2) Soit x est négatif et dans ce cas, on a :

Max $(x-a, -a) = -a$, Min $(0, x) = x$ et $g(x) = \int_{-a}^{x} \frac{1}{a^2}\,dt = \frac{a+x}{a^2}$).

Comme d'après le premier point, $g(a) = g(-a) = 0$, on peut résumer ainsi :

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} \text{ si } x \in [-a, a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

2) a) $Z(\Omega) = [0, a]$ et, pour tout x de $[0, a]$, on a : $P(Z \le x) = P(-x \le X - Y \le x)$.
En notant G la fonction de répartition de $X - Y$ et H celle de Z, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in [0, a],\ H(x) = G(x) - G(-x)}$$

Étant donné que $Z(\Omega) = [0, a]$, on a : $H(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $H(x) = 1$ sur $]a, +\infty[$.

b) La fonction H est bien de classe C^1 sur $]0, a[$, puisque G l'est. En dérivant H sur $]0, a[$, on trouve $h(x) = g(x) + g(-x)$ d'où, comme g est paire : $h(x) = 2g(x)$.
Ensuite, on complète à $\mathbb{R}$ entier en posant, par exemple, $h(0) = \frac{2}{a}$ et $h(a) = 0$,
avec bien sûr, $h(x) = 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]a, +\infty[$, puisque H est constante sur ces deux intervalles. Finalement, une densité h de Z est :

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} \text{ si } x \in [0, a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

3) La fonction $x \mapsto x\,h(x)$ est continue sur $[0, a]$ et nulle ailleurs (ce qui rend les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x\,h(x)\,dx$ et $\int_{a}^{+\infty} x\,h(x)\,dx$ nulles donc convergentes), par conséquent, Z admet une espérance et l'on a :

$$E(Z) = \int_0^a x\,h(x)\,dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x(a-x)\,dx = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a.$$

$$E(Z) = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right).$$

On obtient finalement :

$$\boxed{E(Z) = \frac{a}{3}}$$

De même, la fonction $x \mapsto x^2\, h(x)$ est continue sur $[0, a]$ donc Z admet un moment d'ordre 2 et l'on a : $E(Z^2) = \int_0^a x^2\, h(x)\, dx = \dfrac{2}{a^2} \int_0^a x^2\, (a-x)\, dx$, d'où :

$$E(Z^2) = \frac{2}{a^2}\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{2}{a^2}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^2}{6}.$$

Comme $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$, on a finalement : $V(Z) = \dfrac{a^2}{6} - \dfrac{a^2}{9}$, d'où :

$$\boxed{V(Z) = \frac{a^2}{18}}$$

4) La déclaration de fonction, une fois remplie, s'écrit :
Function z (a : real) : real ;
Var x, y : real ;
Begin
x : = a ∗ random ; y : = a ∗ random ; z : = Abs($x - y$) ;
End ;

Problème ....

Préliminaire

1) a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc aussi sur $[k, k+1]$, avec k dans $\mathbb{N}^*$. Par conséquent, on a, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le \frac{1}{\sqrt{t}} \le \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En intégrant de k à $k+1$ (bornes dans l'ordre croissant, fonctions continues), on obtient : $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \displaystyle\int_k^{k+1} 1\, dt \le \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \le \frac{1}{\sqrt{k}} \int_k^{k+1} 1\, dt$.

Pour finir, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*\ \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \le \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on peut sommer cette double inégalité pour k allant de 1 à $n-1$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La relation de Chasles sur les intégrales et le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme permettent d'écrire :

$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2) En modifiant un peu chacune des sommes et en calculant l'intégrale, on a :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

En recentrant cet encadrement (l'ancienne inégalité de gauche devenant la nouvelle inégalité de droite et réciproquement), on obtient bien :

$\forall n \geq 2,\ 2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$

Comme $2\sqrt{n} - 2 \leq 2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$, on peut élargir un peu :

$\forall n \geq 2,\ 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$

Ceci restant valable pour $n = 1$ (l'encadrement donne : $0 \leq 1 \leq 1$), on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1}$$

Partie 1

1) Comme la suite (X_n) converge complètement, alors, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P(\,|X_n - X| > \varepsilon\,)$ est convergente. On en déduit (c'est la condition nécessaire de convergence d'une série) que son terme général tend vers 0. On a alors : $\lim_{n\to+\infty} P(\,|X_n - X| > \varepsilon\,) = 0$, ce qui, par définition, signifie :

$$\boxed{\text{La suite } (X_n) \text{ converge en probabilité vers } X}$$

2) a) Comme Y_n suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{n}$, on a $P(Y_n = 0) = e^{-\frac{1}{n}}$.

De plus, Y_n est à valeurs entières donc : $(Y_n \geq 1) = (Y_n > 0)$, ce qui permet d'écrire : $P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0)$.

On a donc :

$$\boxed{P(Y_n \geq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}}$$

b) Comme ε est strictement positif, on a : $(Y_n \geq \varepsilon) \subset (Y_n > 0)$.

On en déduit (Y_n est à valeurs entières) : $(Y_n \geq \varepsilon) \subset (Y_n \geq 1)$.

Par croissance de la probabilité, on obtient : $P(Y_n \geq \varepsilon) \leq P(Y_n \geq 1)$.

On a donc : $P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-\frac{1}{n}}$. Une probabilité étant positive, on obtient :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-\frac{1}{n}}}$$

c) Lorsque n tend vers $+\infty$, $-\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et, par continuité de la fonction exponentielle en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$, d'où, par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \geq \varepsilon) = 0.$$

Comme Y_n est à valeurs positives, ceci s'écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\,Y_n - 0\,| \geq \varepsilon) = 0$.
On a donc montré que :

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à } 0}$$

d) On a vu plus haut que : $P(Y_n \geq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

Comme Y_n est à valeurs positives, ceci s'écrit : $P(|\,Y_n - 0\,| \geq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

Pour terminer, lorsque n tend vers $+\infty$, $-\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et on a l'équivalent classique : $e^{-\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. On en déduit que : $P(|\,Y_n - 0\,| \geq 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente (série de Riemann de paramètre 1), le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs garantit que la série de terme général : $P(|\,Y_n - 0\,| \geq 1)$ diverge également.
On a donc trouvé un ε ($\varepsilon = 1$) pour lequel la série de terme général $P(|\,Y_n - 0\,| \geq \varepsilon)$ diverge, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ ne converge pas complètement vers la variable certaine égale à } 0}$$

Partie 2

1) a) Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} E(B_k)$, mais $E(B_k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, donc :

$$\boxed{E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

Par indépendance des variables aléatoires B_k, on a $V(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(B_k)$.

Comme $V(B_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}(1 - \frac{1}{\sqrt{k}})$, on obtient : $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k})$.

$$\boxed{V(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

b) On a : $E(S_n) - V(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Comme la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est positive, alors facilement :

$$\boxed{V(S_n) \leq E(S_n)}$$

2) a) On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire Z_n (qui possède bien une espérance et une variance), ce qui donne :

$\forall \varepsilon > 0, P(\,|Z_n - E(Z_n)| \geq \varepsilon\,) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

Comme $Z_n = \frac{S_n}{E(S_n)}$, on a, par linéarité de l'espérance : $E(Z_n) = \frac{1}{E(S_n)} E(S_n) = 1$.

On obtient alors : $P(\left|Z_n - 1\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$.

Par propriété de la variance, $V(Z_n) = \left(\frac{1}{E(S_n)}\right)^2 V(S_n)$.

Avec la question précédente, on en déduit que : $V(Z_n) \leq \frac{1}{E(S_n)}$, ce qui permet d'écrire (comme $\varepsilon^2 > 0$) : $\frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}$.

On a donc enfin : $P(\left|Z_n - 1\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}$ et comme une probabilité est positive, on obtient :

$$\boxed{0 \leq P(\left|Z_n - 1\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}}$$

b) Comme $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et comme $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n} - 2$, on a en prenant l'inverse (tout est strictement positif) : $0 \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 (2\sqrt{n} - 2)}$.

Par encadrement, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)} = 0$

Toujours par encadrement, grâce à la double inégalité obtenue en 2a), on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(\left| Z_n - 1 \right| \geq \varepsilon) = 0}$$

Ceci signifie bien que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

3) En remplaçant n par n^4, l'inégalité obtenue à la question 2a) devient :

$$0 \leq P(\,|\,Z_{n^4} - 1\,| \geq \varepsilon\,) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_{n^4})}.$$

En majorant comme 8 lignes plus haut (en remplaçant n par n^4), on trouve :

$$\boxed{0 \leq P(\,|\,Z_{n^4} - 1\,| \geq \varepsilon\,) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 (2n^2 - 2)}}$$

Comme $\dfrac{1}{\varepsilon^2(2n^2-2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\varepsilon^2 n^2}$, et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre 2 > 1) on en déduit, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, que la série de terme général $\dfrac{1}{\varepsilon^2(2n^2-2)}$ est convergente, puis, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } P(\,|\,Z_{n^4} - 1\,| \geq \varepsilon\,) \text{ est convergente}}$$

4) a) Par définition de la partie entière, on a : $e_n \leq n^{\frac{1}{4}} < e_n + 1$. En élevant à la puissance 4 (tout est positif), on obtient : $e_n^4 \leq n < (e_n + 1)^4$.

Par ailleurs, $S_{(e_n+1)^4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{(e_n+1)^4} B_k$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k$ et $S_{e_n^4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{e_n^4} B_k$ et, comme les variables aléatoires B_k sont à valeurs positives, on en déduit :

$$S_{e_n^4} \leq S_n \leq S_{(e_n+1)^4}. \qquad (1)$$

Par croissance de l'espérance, on a alors : $E(S_{e_n^4}) \leq E(S_n) \leq E(S_{(e_n+1)^4})$.

En inversant (tout est strictement positif, puisque la variable $S_{e_n^4}$ est positive et n'est pas la variable certaine égale à 0, on a :

$$\frac{1}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leq \frac{1}{E(S_n)} \leq \frac{1}{E(S_{e_n^4})}. \qquad (2)$$

En multipliant (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leq Z_n \leq \frac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}}$$

b) Par définition de Z_n, on a : $Z_{e_n^4} = \dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{e_n^4})}$ et $Z_{(e_n+1)^4} = \dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})}$

On en déduit alors que : $S_{e_n^4} = E(S_{e_n^4})Z_{e_n^4}$ et $S_{(e_n+1)^4} = E(S_{(e_n+1)^4})Z_{(e_n+1)^4}$

En remplaçant dans l'encadrement obtenu à la question 3a), on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \leq Z_n \leq \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4}}$$

5) a) En divisant par $2\sqrt{n}$ l'encadrement obtenu dans le préliminaire, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} \leq 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, ce qui prouve (par encadrement) que :

$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On en déduit : $E(S_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

En remplaçant n par $e_n{}^4$, on obtient : $E(S_{e_n^4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,e_n{}^2$.

En remplaçant n par $(e_n+1)^4$, on obtient : $E(S_{(e_n+1)^4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\,(e_n+1)^2$.

On a alors : $\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(e_n+1)^2}{e_n{}^2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(e_n+1)^2}{e_n{}^2} = 1$, ce qui donne bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} = 1}$$

b) Par définition de la limite, on a, pour n assez grand :

$\forall \varepsilon > 0,\ \left| \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} - 1 \right| \leq \varepsilon.$

Ceci s'écrit aussi : $1 - \varepsilon \leq \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leq 1 + \varepsilon$, et on a bien, en particulier :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leq 1 + \varepsilon} \qquad (1)$$

On a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} = 1$ donc, pour n assez grand, on a, toujours par définition : $\forall \varepsilon' > 0, \left| \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} - 1 \right| \leq \varepsilon'$.

Ceci s'écrit aussi : $1 - \varepsilon' \leq \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leq 1 + \varepsilon'$ et on a, entre autres :

$\forall \varepsilon' > 0,\ 1 - \varepsilon' \leq \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}$. En posant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$, on obtient :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \leq \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}} \qquad (2)$$

c) Comme $\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \leq Z_n$, on a : $(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset \left(\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \leq 1 - \varepsilon \right)$.

Ceci donne $(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset \left(Z_{e_n^4} \leq \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} (1 - \varepsilon) \right)$, et grâce à l'inégalité (1), on obtient $(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset (Z_{e_n^4} \leq 1 - \varepsilon^2)$, soit :

$$\boxed{(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset (Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2)}$$

De la même façon, comme $\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4} \geq Z_n$, on a :

$$(Z_n \geq 1 + \varepsilon) \subset \left(\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4} \geq 1 + \varepsilon \right)$$

On peut alors écrire : $(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset \left(Z_{(e_n+1)^4} \geq \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}(1+\varepsilon) \right)$, et grâce à l'inégalité (2), on obtient : $(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset \left(Z_{(e_n+1)^4} \geq \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(1+\varepsilon) \right)$, soit : $(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset (Z_{(e_n+1)^4} \geq 1+\frac{\varepsilon}{2})$, et enfin :

$$\boxed{(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset \left(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

d) D'après la question 5c), on a : $(Z_n \leq 1-\varepsilon) \subset (Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2)$. On sait aussi que $(Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2) \subset (| Z_{e_n^4} - 1 | \geq \varepsilon^2)$, donc on en déduit :

$$\boxed{(Z_n \leq 1-\varepsilon) \subset (| Z_{e_n^4} - 1 | \geq \varepsilon^2)}$$

Toujours d'après la question 5c), on a : $(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset (Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \frac{\varepsilon}{2})$.

Comme $(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \frac{\varepsilon}{2}) \subset (| Z_{(e_n+1)^4} - 1 | \geq \frac{\varepsilon}{2})$, on peut écrire :

$$\boxed{(Z_n \geq 1+\varepsilon) \subset \left(| Z_{(e_n+1)^4} - 1 | \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).}$$

Pour finir, on sait que : $(| Z_n - 1 | \geq \varepsilon) = (Z_n - 1 \geq \varepsilon) \cup (Z_n - 1 \leq -\varepsilon)$. On peut alors écrire : $(| Z_n - 1 | \geq \varepsilon) = (Z_n \geq 1+\varepsilon) \cup (Z_n \leq 1-\varepsilon)$.
Par incompatibilité, on obtient : $P(| Z_n - 1 | \geq \varepsilon) = P(Z_n \geq 1+\varepsilon) + P(Z_n \leq 1-\varepsilon)$.
En tenant compte de tout ce qui précède, on a bien :

$$\boxed{P(| Z_n - 1 | \geq \varepsilon) \leq P\left(| Z_{(e_n+1)^4} - 1 | \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P(| Z_{e_n^4} - 1 | \geq \varepsilon^2)}$$

e) La domination trouvée à la question 5d) ci-dessus ne permet malheureusement pas de conclure : on ne peut pas appliquer ici le résultat de la question 3), puisque e_n et e_n+1 ne sont pas des entiers naturels quelconques (e_n n'est que la partie entière de $n^{\frac{1}{4}}$).

Concours **EDHEC** **2010**
Classes Préparatoires

MATHEMATIQUES

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant une place importante aux probabilités (premier exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet sélectif, d'un niveau abordable, mais laissant encore plus d'initiative aux candidats que par le passé. Il a permis de bien apprécier les connaissances et les capacités à raisonner des candidats, ce qui est le premier but d'un texte de concours.

• L'exercice 1 proposait l'étude d'une fonction de n variables réelles dont l'étude locale en les points critiques ne permettait pas de conclure à la présence d'un extremum, mais pour laquelle l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantissait la présence d'un minimum global.

• L'exercice 2 étudiait une famille (f_λ) d'endomorphismes définis sur un espace vectoriel et dont les sous-espaces propres étaient supplémentaires orthogonaux.

• L'exercice 3 avait pour but de déterminer la loi de $|X - Y|$, où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, a[$, puis de donner une simulation informatique de cette loi.

• Le problème, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif d'étudier la notion de convergence complète d'une suite de variables aléatoires indépendantes définie de la façon suivante : la suite (X_n) converge complètement vers X, c'est-à-dire que, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ est convergente.
Un exemple prouvait que la convergence complète implique la convergence en probabilités et un autre prouvait que la réciproque est fausse.
La fin du problème proposait l'étude d'une suite de variables aléatoires qui convergeait complètement et en probabilités.

Statistiques :
Pour l'ensemble des 3958 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,87 sur 20 et l'écart type vaut 5,8.
35 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (15 % ayant une note inférieure à 4).
22 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.
25 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Analyse des copies :
L'exercice 1 a révélé que peu de candidats sont vraiment bien préparés aux notions du programme vues vers la fin de l'année.

L'exercice 2 a révélé qu'en algèbre linéaire ou bilinéaire, les candidats savent, en majorité, traiter les questions classiques, mais sont capables de commettre des fautes quasi impardonnables, comme confondre $(f_\lambda)^2(x)$ avec $(f_\lambda(x))^2$, cette dernière expression n'ayant aucun sens dans cet exercice.

L'exercice 3 montre que beaucoup de candidats maîtrisent mal le produit de convolution de deux variables à densité indépendantes (ce qui est une notion, il est vrai, un peu technique, mais il a surtout révélé d'énormes problèmes, chez certains candidats, avec la manipulation des valeurs absolues, ce qui est plus étrange à ce niveau-ci.

Le problème a montré qu'un nombre assez important de candidats sont capables de travailler avec des notions nouvelles (ici, la convergence complète) et savent utiliser leurs connaissances de façon intelligente. A contrario, ce problème a aussi révélé que certains autres candidats manquent de maturité et sont prêts à écrire n'importe quoi pour conclure.
Les copies sont en grande majorité honnêtes, les candidats précisant clairement qu'ils admettent le résultat d'une question non traitée.
Cela dit, il faut noter cette année encore que certaines copies sont mal présentées : résultats mal mis en valeur (ni encadrés, ni même soulignés), numérotation des questions non respectée, etc.
Comme l'année dernière, les correcteurs ont constaté que lorsque les résultats sont donnés par l'énoncé, certains candidats sont prêts à tout pour faire croire qu'ils ont prouvé le résultat demandé, y compris à l'aide d'une suite de calculs parfois aberrants ! Qu'ils sachent que ceci est sanctionné très sévèrement et qu'aucun correcteur n'est dupe.
Certains correcteurs demandent donc s'il est possible d'établir un malus qui serait attribué aux copies mal présentées et/ou malhonnêtes : la question est à l'étude.

Voici une liste des quelques fautes, omissions et imprécisions les plus fréquentes (chacune d'entre elles ayant été trouvée sur un nombre significatif de copies) commises cette année :

Exercice 1
• Une définition mal comprise : l'inégalité « $\forall (x_1, x_2) \in]0,+\infty[^2,\ f(x_1, x_2) \geq 4$ » ne prouve pas que la fonction f possède un minimum global égal à 4 sur $]0,+\infty[^2$, mais seulement que 4 est un minorant de f sur $]0,+\infty[^2$.
• Il n'est pas question d'affirmer que, comme $J_n\, v_n = n\, v_n$, alors le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est $\mathrm{vect}(v_n)$.
• Trop de candidats semblent ne pas être en mesure de prouver que : $(x_1 + x_2)^2 \geq 4\, x_1 x_2$…

• Le scandale : écrire que dim $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n$ est quasi indigne à ce niveau.

Exercice 2.

• Il n'est vraiment pas bien de confondre $f_\lambda{}^2(x)$ avec $\left(f_\lambda(x)\right)^2$.
• De très nombreux candidats pensent que le carré scalaire d'un vecteur u est égal à sa norme.
• Un nombre non négligeable de candidats ne savent pas ce qu'est un endomorphisme symétrique.
• Il n'est pas question de se contenter de vérifier que, pour tout x de l'espace E, $f_{-1}(x)$ appartient à $\left(Vect(u)\right)^\perp$ pour affirmer que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $\left(Vect(u)\right)^\perp$.
• Un autre scandale : le produit scalaire, noté $(x\,/\,y)$ se transforme en $x\,/\,y$, qui devient ensuite le quotient du vecteur x par le vecteur y !
• Mieux encore : de nombreux candidats pensent que, puisque x et u sont des vecteurs de E, alors leur produit scalaire est aussi un vecteur de E.

Exercice 3

• Il n'est vraiment pas bien de trouver une densité négative, sans signaler que l'on s'est très certainement trompé !
• Il n'est pas correct d'annoncer que l'on ne dérive que là où c'est possible, puis de dériver partout !
• Certains correcteurs semblent ne pas apprécier le "lemme des coalitions", ainsi que les "réserves de convergence" qui ne sont jamais levées, sans parler du "théorème de Haar" pour désigner la formule de convolution, et enfin "l'isotonie de la probabilité" pour désigner ce que l'on appelle (certes improprement) la croissance de la probabilité.

Problème

• Trop de candidats oublient de justifier les étapes permettant de transformer une inégalité.
• Il faut absolument éviter d'affirmer que $P(Y_n \geq 1) = 1$ car Y_n suit une loi de Poisson : apprendre son cours est la première chose à faire.
• Le must que l'on ne s'attendait pas à croiser, mais que l'on a vu sur un certain nombre de copies cette année : « la variable S_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes donc elle suit une loi binomiale » : le problème était que ces variables de Bernoulli n'avaient pas le même paramètre !
• Il n'est pas nécessaire que les variables B_k soient indépendantes pour écrire l'égalité suivante : $E(\sum_{k=1}^{n} B_k) = \sum_{k=1}^{n} E(B_k)$. Elle résulte de la linéarité d'espérance.

Conclusion :

Le niveau moyen est en augmentation par rapport à l'année dernière : le nombre de copies faibles (note inférieure à 8) est en diminution de 3 % par rapport à l'année dernière et le nombre de très bonnes copies (note supérieure à 16) est en augmentation de 4 % par rapport à l'année dernière.
Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.