
BIENVENUE
DANS NOS
RESEAUX
D'ENERGIE
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
Marc-Antoine,
étudiant en pré-Master
EDHEC
BUSINESS SCHOOL

**ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD**

**Concours d'admission sur classes préparatoires**

# MATHEMATIQUES

**Option scientifique**

**6 mai 2013 de 8h à 12h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

1) Étude d'un exemple : pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.

a) Vérifier que $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout entier naturel non nul, déterminer $u_n$ en fonction de $n$.

c) Établir la convergence de la série de terme général $u_n$ et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.

2) Étude d'un deuxième exemple.

On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $a_n = n!$.

a) Écrire une déclaration de fonction Pascal dont l'en-tête est **function fact (*n* : integer) : integer ;** et qui renvoie $n!$ à l'appel de fact$(n)$.

b) Écrire le corps principal d'un programme Pascal, utilisant cette fonction, et permettant de calculer et d'afficher la valeur de $u_n$ lorsque la valeur de $n$ est entrée au clavier par l'utilisateur.

c) Établir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

d) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $u_n \leq \dfrac{1}{(n-1)!}$.

e) En déduire que la série de terme général $u_n$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

*On revient au cas général.*

3) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + 2 + \dots + n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n}\right)$$

4) a) Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation, que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{a_k}$.

c) Montrer enfin que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

### Exercice 2

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et on rappelle qu'un hyperplan de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $n-1$. Pour finir, on désigne par $Id$ l'endomorphisme identité de $E$.

1) Étude d'un premier exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par $f$.

2) Étude d'un deuxième exemple ($n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$).

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de $f$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par $f$.

On suppose dans la suite que $E$ est un espace euclidien de dimension $n$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $E$.

Le produit scalaire des vecteurs $x$ et $y$ de $E$ est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de $x$ est notée $\| x \|$.

On considère un endomorphisme $f$ de $E$ qui possède au moins une valeur propre $\lambda$ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de $E$ stable par $f$.

3) On note $f^*$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

b) Établir que $f^*$ est l'unique endomorphisme de $E$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

4) a) Montrer que $\lambda$ est valeur propre de $f^*$.

b) On considère un vecteur propre $u$ de $f^*$ associé à la valeur propre $\lambda$.

Montrer que $(\operatorname{vect}(u))^{\perp}$ est un hyperplan de $E$ et qu'il est stable par $f$.

### Exercice 3

1) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $f$ peut être considérée comme une densité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes $f$ comme densité.

De plus, pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $S_n = \operatorname{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$. On admet que $S_n$ et $Y_n$ sont des variables aléatoires à densité définies, elles aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) Déterminer la fonction de répartition, notée $F$, commune aux variables aléatoires $X_k$.

3) On note $G_n$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y_n$. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de $n$ et $x$.

4) a) Montrer que, pour tout réel $x$ négatif ou nul, on a $G_n(x) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

b) Justifier que, pour tout réel $x$ strictement positif, il existe un entier naturel $n_0$ non nul, tel que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $n_0$, on a $x > \dfrac{1}{n}$.

En déduire que : $\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n$.

5) a) Déterminer, pour tout réel $x$, la limite de $G_n(x)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.

b) Montrer que la fonction $G$ ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

c) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Y$ dont la fonction de répartition est $G$.

6) Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

### Problème

On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ désigne un réel strictement positif. On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $P(X = Y)$ lorsque $\lambda$ est au voisinage de $+\infty$.

#### *Partie 1*

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

1) a) Calculer $u_0$ et $u_1$.

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)\, u_{n+2} = (n+1)\, u_n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)\, u_{n+1}\, u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

d) En déduire la valeur de $u_{2n+1}$.

3) a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.

b) En déduire, en utilisant les variations de $(u_n)$, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c) Montrer enfin que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ .

***Partie 2***

1) Établir, pour tout réel $x$, la convergence de l'intégrale $I(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ .

***Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.***

2) a) Montrer qu'il existe une constante $M$, indépendante de $x$, telle que : $0 \le \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \le M$ .

b) Montrer que : $\forall u \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right],\ 1 \le \dfrac{1}{\sqrt{1-u}} \le 1+u$ .

3) a) En se référant à une loi normale, donner les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-t^2}\,dt$ .

b) Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{t\,x}$ pour montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ .

c) Montrer de la même façon que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$ .

4) a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1+t$, que :

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du$$

b) Utiliser le résultat de la question 2b) pour en déduire que : $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ .

***Partie 3***

1) Exprimer comme somme d'une série la probabilité $P(X = Y)$.

2) a) On désigne par $t$ un réel de $[-1, 1]$ et par $x$ un réel strictement positif.

Montrer que, pour tout $u$ compris entre 0 et $-t\,x$, on a : $e^u \le e^x$. Écrire ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $u \mapsto e^u$ entre 0 et $-t\,x$.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$ , $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = u_k$ .

c) Déduire des deux questions précédentes que : $\left| I(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}} \right| \le \dfrac{2\,x^{2n+1}\,e^x}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}$ .

d) Montrer enfin que : $\forall x > 0,\ I(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2\, 2^{2k}}$ .

3) Établir que : $P(X = Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$ .

# Corrigé

## Exercice 1

**1) a)** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{a_n}$.

On en déduit : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et sa somme vaut 1.

**b)** On a : $u_n=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)}=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k}=\frac{n}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}$.

On a donc : $u_n=\frac{6}{(n+1)(2n+1)+3(n+1)}=\frac{6}{(n+1)\big((2n+1)+3\big)}=\frac{6}{(n+1)(2n+4)}$.

Conclusion :

$$\boxed{u_n=\frac{3}{(n+1)(n+2)}}$$

**c)** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$\sum_{k=1}^{n}u_k=3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=3\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\right)$.

Après simplification ("télescopage"), on trouve : $\sum_{k=1}^{n}u_k=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3}=0$, la série de terme général $u_n$ converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$. Comme $\frac{3}{2}\le 2$, on vérifie bien que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\le 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}}$$

**2) a)** Version itérative :

```
function fact (n : integer) : integer ;
var k, aux : integer ;
begin
    aux : = 1 ;
    for k : = 1 to n do aux : = aux * k ;
    fact : = aux ;
end ;
```

Version récursive :

```
function fact (n : integer) : integer ;
begin
if n = 0 then fact : = 1  else fact : = n*fact(n - 1) ;
end ;
```

**b)**
```
Program Edhec2013 ;
var   n, k, S : integer ;
      u : real ;
function fact (n : integer) : integer ;
begin   if n = 0  then  fact : = 1    else   fact : = n*fact(n−1) ; end ;
Begin
Readln(n) ; S : = 0 ;
For k : = 1 to n do S : = S + fact(k) ;
u : = n / S ;
Writeln(u) ;
End.
```

**c)** D'après le cours sur la série exponentielle (qui converge), la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge.

**d)** D'autre part : $u_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} k!} \leq \frac{n}{n!}$ (on a minoré la somme par son plus grand terme).

En simplifiant par $n$ non nul, on en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}}$$

**e)** La série de terme général $\frac{1}{(n-1)!}$ converge (série exponentielle) donc, grâce au critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $u_n$ converge et sa somme vérifie : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$. Après changement d'indice, on obtient : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

On a donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e$.

Par ailleurs, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e - 1$ donc $2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 2e - 2$.

Comme $e$ est supérieur à 2, on a $e \leq 2e - 2$ et on trouve bien :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}$$

**3)** Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ muni de son produit scalaire canonique, défini par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\langle x, y\rangle^2 \leq \| x\|^2 \| y\|^2$ .

On l'applique avec $x = (\sqrt{a_1}\,, \sqrt{a_2}\,, \ldots, \sqrt{a_n}\,)$ et $y = (\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{2}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{n}{\sqrt{a_n}})$.

On a alors $\langle x, y\rangle^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$, $\| x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $\| y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{a_i}$ .

On peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + 2 + \ldots + n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)}$$

**4) a)** On sait que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. L'égalité précédente s'écrit donc :

$\frac{n^2 (n+1)^2}{4} \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \ldots + \frac{n^2}{a_n}\right)$.

En divisant des deux côtés par $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ qui est strictement positif et par $\frac{n^2 (n+1)^2}{4}$ qui est également strictement positif, on obtient :

$\frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq \frac{4}{n^2 (n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$. En multipliant par $(2n+1) > 0$ de chaque côté, on trouve :

$$\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4\, \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

Il suffit alors de remarquer que $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2}$ d'où l'on tire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}}$$

**b)** Sommons l'inégalité précédente pour $n$ allant de 1 à $N$ (avec $N \geq 1$) :

$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$.

Ceci s'écrit : $\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

En intervertissant les deux sommes du membre de droite, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=k}^{N} \frac{k^2}{a_k} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

On arrange, toujours dans le membre de droite :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k} \sum_{n=k}^{N} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

La somme intérieure se simplifie et il reste :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)$$

En développant, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} - \frac{4}{(N+1)^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k}$$

Comme $\frac{4}{(N+1)^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k} \geq 0$, on peut encore majorer et obtenir :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}}$$

**c)** Comme la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et est une série à termes positifs, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

En notant $S_N$ la somme partielle d'ordre $N$ de la série de terme général $\frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$, on obtient alors, grâce à la question 4b) : $S_N \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$.

La suite $(S_N)$ est alors majorée et, comme elle est croissante (en effet, on a immédiatement $S_{N+1} - S_N = \frac{2N+1}{a_1+a_2+\ldots+a_N} > 0$), on en déduit qu'elle converge, ce qui signifie exactement que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \text{ converge}}$$

De plus, $\frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ donc, par critère de comparaison (séries à termes positifs), la série de terme général $\frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ converge également.

On a alors : $\sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$ (la dernière inégalité provenant de la question 4b). En passant à la limite dans cette inégalité (les séries convergent), on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

En divisant par 2, on obtient le résultat demandé :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}}$$

## Exercice 2

**1)** Par lecture de la matrice $M$, on a : $\mathrm{Im}f = \mathrm{vect}(\,(1, 0, 0), (2, 3, 0)\,)$. Les vecteurs (1, 0, 0) et (2, 3, 0) ne sont pas proportionnels donc la famille ( (1, 0, 0), (2, 3, 0) ) est libre et c'est, ainsi, une base de Im$f$. Ceci prouve que Im$f$ est de dimension 2 donc Im$f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout vecteur $y$ de $\mathrm{Im}\, f$, on sait, par définition de $\mathrm{Im}\, f$, que : $f(y) \in \mathrm{Im}\, f$ (ceci étant vrai même si $y$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}\, f$ ).
Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Im}f \text{ est un hyperplan de } E \text{ stable par } f}$$

**2) a)** Procédons à une recherche classique.

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{L_1 \leftrightarrow L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}$$

$$\boxed{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+5\lambda-4 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $M$ (et de $f$) sont les réels $\lambda$ qui rendent $M-\lambda I$ non inversible, ce sont donc les solutions de l'une des équations $-\lambda^2+5\lambda-4 = 0$ et $1-\lambda = 0$, ce qui donne deux valeurs propres :

$$\boxed{\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 4}$$

**b)** Recherche de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $M$ pour la valeur propre $\lambda_1 = 1$.

On résout le système $(M-I)X = 0$, ce qui se réduit à $x+y+z=0$.

On en déduit que :

$$X = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci prouve que : $\mathrm{Ker}(f-Id) = \mathrm{vect}(\,(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\,)$.

La famille $(\,(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\,)$ est libre car constituée de deux vecteurs non proportionnels donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(f-Id)$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(f-Id)$ est de dimension 2 et c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Soit $x$ un vecteur quelconque de $\mathrm{Ker}(f-Id)$. Par définition de $\mathrm{Ker}(f-Id)$, on a $f(x) = x$. Par conséquent, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f-Id)$ puisque $f(x)$ est égal à $x$ et $x$ appartient à $\mathrm{Ker}(f-Id)$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f-Id) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f}$$

*Dans toute la suite, on désigne par $M$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.*

**3) a)** D'après le cours, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a :

$\langle f(x), y\rangle = {}^t(MX)Y$ et $\langle x, f^*(y)\rangle = {}^tX({}^tM\,Y)$

où $X$ et $Y$ sont les matrices colonnes des coordonnées de $x$ et $y$ dans la base $\mathcal{B}$, $M$ désignant la matrice de $f$ dans cette base et ${}^tM$ celle de $f^*$. On a alors, par propriété de la transposition :

$\langle f(x), y\rangle = ({}^tX\,{}^tM)Y = {}^tX({}^tM\,Y) = \langle x, f^*(y)\rangle$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E\times E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle}$$

**b)** Supposons qu'il existe un autre endomorphisme $g$ de $E$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E\times E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$

Comme $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$, on obtient : $\forall (x,y)\in E\times E, \langle x,\ g(y)\rangle = \langle x,\ f^*(y)\rangle$. Ceci s'écrit encore (par linéarité à droite du produit scalaire) : $\langle x,\ g(y) - f^*(y)\rangle = 0$.

Cette égalité étant vraie pour tout $x$ de $E$, elle est vraie pour $x = g(y) - f^*(y)$, ce qui donne :

$$\forall y \in E,\ \| g(y) - f^*(y) \|^2 = 0$$

On obtient alors : $\forall y \in E,\ g(y) - f^*(y) = 0$.

On a donc , pour tout $y$ de $E$, $g(y) = f^*(y)$, ce qui permet de conclure que : $g = f^*$.

$$\boxed{f^* \text{ est le seul endomorphisme de } E \text{ vérifiant : } \forall (x,y)\in E\times E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle}$$

**4) a)** En notant toujours $M$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$, comme $\lambda$ est valeur propre de $M$, la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible. La transposée de cette matrice n'est donc pas inversible non plus, ce qui prouve, par linéarité de la transposition, que ${}^tM - \lambda\,{}^tI$ n'est pas inversible et finalement que ${}^tM - \lambda I$ n'est pas inversible (puisque ${}^tI = I$).

Ceci montre que $\lambda$ est valeur propre de ${}^tM$ donc de $f^*$.

**b)** On sait que, pour tout sous-espace $F$ de $E$, on a : $\dim F = \dim E - \dim F^{\perp}$. Dans le cas présent, comme $\dim \text{vect}(u) = 1$, on a $\dim(\text{vect}(u))^{\perp} = n-1$, ce qui prouve que $(\text{vect}(u))^{\perp}$ est un hyperplan de $E$.
Considérons un vecteur $v$ élément de $(\text{vect}(u))^{\perp}$ et montrons que $f(v)$ est également élément de $(\text{vect}(u))^{\perp}$, c'est-à-dire que : $\langle f(v), u\rangle = 0$.
$\langle f(v), u\rangle = \langle v, f^*(u)\rangle = \langle v, \lambda u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle$. Comme $v$ appartient à $(\text{vect}(u))^{\perp}$, on en déduit que $\langle v, u\rangle = 0$, ce qui montre que $\langle f(v), u\rangle = 0$.
Conclusion :

$$\boxed{(\text{vect}(u))^{\perp} \text{ est un hyperplan de } E \text{ stable par } f}$$

## Exercice 3

**1)** • Les restrictions de la fonction $f$ aux intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ sont bien définies et positives (car $x^2$ est strictement positif sur ces intervalles) et la restriction de $f$ à $]-1, 1[$ est positive sur $]-1, 1[$ puisqu'elle y coïncide avec la fonction nulle.

• Les restrictions de la fonction $f$ aux intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ sont continues comme fonctions rationnelles et la restriction de $f$ à $]-1, 1[$ est continue sur $]-1, 1[$ en tant que fonction constante (nulle). La fonction $f$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en $-1$ et en 1.

**Remarque.** En ce qui concerne la continuité, on peut se permettre d'écrire que $f$ est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$ à condition d'ouvrir les crochets en $-1$ et en 1 (sinon, ça voudrait dire que $f$ est continue en $-1$ et en 1, ce qui n'est pas le cas).

• Pour tout réel $A \geq 1$, l'intégrale $\int_1^A \frac{1}{2x^2}dx$ est bien définie (fonction continue) et on a :

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{2x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\right]_1^A = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{A}).$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.
De plus, la fonction $(x \mapsto \frac{1}{x^2})$ est paire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2x^2}dx$ converge également et vaut $\frac{1}{2}$ : on a donc $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
Pour finir, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ puisque $f$ est nulle sur $]-1, 1[$.
Par définition de la convergence d'une intégrale deux fois impropre, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.
Les trois points précédents prouvent que :

$$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité}}$$

**2)** Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

• Pour tout $x$ élément de $]-\infty, -1]$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2t^2}dt$.

$\forall A < x,\ \int_A^x \frac{1}{2t^2}\,dt = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2A}$. Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$, on a :

$$\boxed{\forall x \in\ ]-\infty, -1],\ F(x) = -\frac{1}{2x}}$$

• Pour tout $x$ élément de $]-1, 1[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\,dt + \int_{-1}^{x} 0\,dt = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in\ ]-1, 1[,\ F(x) = \frac{1}{2}}$$

• Pour tout $x$ élément de $]1, +\infty[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\,dt + \int_{-1}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{2t^2}\,dt$.

$F(x) = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x}). =1 - \frac{1}{2x}$.

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[,\ F(x) = 1 - \frac{1}{2x}}$$

**3)** Comme $Y_n = \frac{S_n}{n}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(Y_n \leq x) = (S_n \leq nx)$.

De plus, $S_n = \text{Sup}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(S_n \leq nx) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \leq nx)$.

En prenant les probabilités et par indépendance mutuelle des variables $X_k$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq nx) = (F(nx))^n$$

Il faut maintenant distinguer trois cas : $nx \leq -1$, $-1 < nx < 1$ et $nx \geq 1$. En revenant à $x$, on a les trois cas : $x \leq \frac{-1}{n}$, $\frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}$ et $x \geq \frac{1}{n}$. On obtient alors :

| |
|---|
| • $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{n}\right]$, $G_n(x) = (-\frac{1}{2nx})^n$ |
| • $\forall x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, $G_n(x) = (\frac{1}{2})^n$ |
| • $\forall x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$, $G_n(x) = (1 - \frac{1}{2nx})^n$ |

**4) a)** Pour tout réel $x$ négatif ou nul, on a, par croissance de $G_n$ (car $G_n$ est une fonction de répartition) : $G_n(x) \leq G_n(0)$. Comme $G_n(0) = (\frac{1}{2})^n$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \leq 0,\ G_n(x) \leq (\frac{1}{2})^n}$$

**b)** Pour tout réel $x$ strictement positif, afin avoir $x > \frac{1}{n_0}$, comme tout est strictement positif, il suffit de choisir un entier naturel $n_0$ tel que $n_0 > \frac{1}{x}$.

On peut choisir $n_0$ égal à la partie entière de $\frac{1}{x}+1$, ce qui donne $n_0 \le \frac{1}{x}+1 < n_0 + 1$ et l'inégalité de droite fournit bien $n_0 > \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $x > \frac{1}{n_0}$.

A fortiori, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $n_0$, on a : $x > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}$.

D'après la question 3), on obtient :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \ge n_0,\ G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n}$$

**5) a)** Une fonction de répartition étant positive, on a, d'après la question 4a) :

$\forall x \le 0,\ 0 \le G_n(x) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Par encadrement, on obtient :

$$\boxed{\forall x \le 0,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0}$$

D'après la question 4b) : $\forall x > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \ge n_0,\ G_n(x) = \left(1-\frac{1}{2nx}\right)^n$.

On en déduit $\ln(G_n(x)) = n\ \ln\left(1-\frac{1}{2nx}\right)$ et, grâce à l'équivalent $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ (avec $u = -\frac{1}{2nx}$ qui tend bien vers 0) on en déduit :

$$\ln(G_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n \times \frac{-1}{2nx}$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(G_n(x)) = -\frac{1}{2x}$ et, par continuité de la fonction exponentielle en $-\frac{1}{2x}$, on en tire :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{2x}}}$$

La fonction $G$, limite de $G_n$, est donc définie par : $G(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$.

**b)** On vérifie les 5 points garantissant que $G$ est une fonction de répartition d'une variable à densité.

- Comme $G$ est nulle sur $]-\infty, 0]$, on a bien $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2x}} = 1$ (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2x} = 0$).

• $G$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En effet, elle l'est sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante, et elle l'est sur $]0, +\infty[$ en tant que composée bien définie de fonctions continues.

De plus, en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} G(x) = 0 = G(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2x}} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{2x} = -\infty$).

• G est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 (sa restriction à $]-\infty, 0[$ est une fonction constante (nulle), et sa restriction à $]0, +\infty[$ est la composée bien définie de fonctions de classe $C^1$).

• Pour tout $x$ positif, $G'(x) = \dfrac{1}{2x^2}\, e^{-\frac{1}{2x}} > 0$. La fonction $G$ est donc croissante sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, 1[$ et comme $G$ est nulle sur $]-\infty, 0]$, $G$ est bien croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$. En effet, on a le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_n(x)$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est une fonction de répartition d'une variable à densité}}$$

**c)** Les résultats des deux questions précédentes prouvent que la suite $(Y_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire $Y$ dont la fonction de répartition est $G$.

**6)** Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{1}{Y}(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.

Comme l'énoncé assure que $\dfrac{1}{Y}$ est une variable aléatoire, en notant $H$ la fonction de répartition de $\dfrac{1}{Y}$, on a : $\forall x \le 0,\ H(x) = 0$. (1)

De plus, on a : $\forall x > 0$, $H(x) = P\left(\dfrac{1}{Y} \le x\right) = P\left(Y \ge \dfrac{1}{x}\right) = 1 - P\left(Y \le \dfrac{1}{x}\right) = 1 - G\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La deuxième égalité est justifiée par le fait que $x$ est strictement positif et que $\dfrac{1}{Y}$ prend des valeurs strictement positives.

En remplaçant grâce à la question 5a), on obtient : $\forall x > 0$, $H(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$. (2)
Grâce à (1) et (2), on conclut :

$$\boxed{\frac{1}{Y} \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{2}}$$

## Problème

### *Partie 1*

**1) a)** $u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \dfrac{\pi}{2}$.

$u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = 1$.

**b)** $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient : $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (\sin t - 1)\,dt$.

Comme $\sin t$ est positif sur $[0,\ \pi/2]$ et comme $\sin t - 1$ est négatif, on a, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant : $u_{n+1} - u_n \le 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

**c)** On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt$. Comme la fonction sinus est continue, positive et non identiquement nulle ($\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$), le théorème de stricte positivité de l'intégrale assure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$$

**2) a)** Dans l'intégrale définissant $u_{n+2}$, on pose : $u(t) = (\sin t)^{n+1}$ et $v'(t) = \sin t$.

On peut alors choisir $v(t) = -\cos t$ et on a : $u'(t) = (n+1)(\sin t)^n \cos t$. Les fonctions $u$ et $v$ étant de classe $C^1$ sur $[0,\ \pi/2]$, l'intégration par parties est licite et on trouve :

$u_{n+2} = \left[-\cos t(\sin t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t(\sin t)^n\,dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t(\sin t)^n\,dt$.

(le crochet est nul car $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $(\sin 0)^{n+1} = 0$, puisque $n+1 \ge 1$)

Grâce à la relation la plus connue de la trigonométrie, on obtient :

$$u_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)(\sin t)^n\,dt$$

En développant dans l'intégrale et, toujours par linéarité, on obtient :

$u_{n+2} = (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2}\,dt\right) = (n+1)(u_n - u_{n+2}) = (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}$.

On trouve finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\,u_{n+2} = (n+1)\,u_n}$$

**b)** Procédons par récurrence.

- Pour $n = 0$, $\dfrac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (d'après la première question).

On a donc : $u_0 = \dfrac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

• Si l'on suppose que, pour un certain $n$ de $\mathbb{N}$, on a $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$, alors, d'après la question 2a), on trouve :

$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} u_{2n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \times \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)} \times \dfrac{(2n+1)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$. En multipliant haut et bas par $(2n+2)$, on obtient :

$u_{2n+2} = \dfrac{2n+2}{2(n+1)(2n+2)} \times \dfrac{(2n+1)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n+2)!}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

**c)** En multipliant par $u_{n+1}$ les deux membres de l'égalité trouvée à la question 2a), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\, u_{n+2}\, u_{n+1} = (n+1)\, u_{n+1}\, u_n$$

Si l'on pose $v_n = (n+1) u_n u_{n+1}$, ceci donne : $v_{n+1} = v_n$. La suite $(v_n)$ est donc constante, de premier terme $v_0 = u_0 u_1 = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\pi}{2}$.

En d'autres termes :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\ u_{n+1}\, u_n = \frac{\pi}{2}}$$

**d)** D'après la relation précédente, en remplaçant $n$ par $2n$, on a : $u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1)\, u_{2n}}$.

Avec le résultat de la question 2b), on obtient : $u_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2(2n+1) \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}}$

Ceci se simplifie et donne :

$$\boxed{u_{2n+1} = \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}}$$

**3) a)** D'après la question 2a), on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$.

**b)** Comme la suite $(u_n)$ est décroissante, on a : $u_{n+2} \le u_{n+1} \le u_n$. En divisant les trois membres de cette double inégalité par $u_n$ qui est strictement positif, on obtient :

$\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \le \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n} = 1$, on a, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1}$$

**c)** Le résultat de la question 2c) peut s'écrire : $u_{n+1}\, u_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. D'après la question précédente, on sait que : $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. En prenant un équivalent de chaque côté, on obtient :

$u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$. En prenant la racine carrée, on obtient : $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Comme $u_n$ est positif, on a bien :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

***Partie 2***

**1)** Établissons tout d'abord la convergence de l'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$ et, comme $\lim\limits_{t\to 1} e^{-tx} = e^{-x}$, on a :

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $\dfrac{1}{2} < 1$), le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives assure que l'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge également.

Établissons maintenant la convergence de l'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 0]$ et, comme $\lim\limits_{t\to -1} e^{-tx} = e^{x}$, on a :

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to -1}{\sim} \frac{e^{x}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $\dfrac{1}{2} < 1$), le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives assure que l'intégrale $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge également.

Par définition de la convergence d'une intégrale deux fois impropre, on peut dire que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ converge}}$$

**2) a)** Comme $x$ est positif, on a, pour tout $t$ de $[0,1]$ : $0 \le e^{-tx} \le 1$.

On en déduit, pour tout $t$ de $[0,1[$ : $0 \le \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (car $\sqrt{1-t^2}$ est strictement positif).

Les intégrales $\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ convergent (la deuxième est un cas particulier de la première avec $x=0$) d'après la question précédente, et en intégrant bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leq \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ est bornée}}$$

**b)** Pour tout $u$ de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a : $\frac{1}{2} \leq 1-u \leq 1$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, on obtient : $2 \geq \frac{1}{\sqrt{1-u}} \geq 1$. On a donc, en particulier : $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u}}$.

Par ailleurs, pour comparer $1+u$ et $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$, on va comparer leurs carrés en faisant leur différence : $(1+u)^2 - \frac{1}{1-u} = \frac{-u\,(u^2+u-1)}{1-u}$. Le trinôme entre parenthèses est une fonction croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et prend ses valeurs entre –1 et $-\frac{1}{4}$, ce qui prouve qu'il est négatif, et ainsi : $\frac{-u\,(u^2+u-1)}{1-u} \geq 0$. On a donc : $(1+u)^2 \geq \frac{1}{1-u}$ et, par croissance de la fonction racine carrée, on a bien : $1+u \geq \frac{1}{\sqrt{1-u}}$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall u \in \left[0,\frac{1}{2}\right],\ 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1+u}$$

**3) a)** D'après le cours sur la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, on sait que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2}\,dt = 1$. On en déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Par parité de la fonction intégrée, on a donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

En se référant au moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire $Z$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, on a : $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}\, t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt$.

Comme $E(Z^2) = V(Z) + \left(E(Z)\right)^2 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$, on en déduit : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Toujours par parité de la fonction intégrée, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}}$$

**b)** En posant $u = \sqrt{t\,x}$, ce changement de variable étant bien de classe $C^1$ sur $\left]0, 1\right]$, bijectif de $\left[0,1\right]$ sur $\left[0, \sqrt{x}\right]$, on obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-u^2}}{\frac{u}{\sqrt{x}}} \frac{2u}{x}\, du = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$.

D'après la question précédente, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{t}}\, dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}}$$

**c)** Toujours avec le même changement de variable, on trouve :
$\displaystyle\int_0^1 e^{-t\,x}\sqrt{t}\, dt = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} \frac{u}{\sqrt{x}} \frac{2u}{x}\, du = \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} u^2 e^{-u^2} du$.

D'après la question 3a), on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} t^2 e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\int_0^1 e^{-t\,x}\sqrt{t}\, dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}}$$

**4) a)** On fait le changement de variable $u = 1 + t$, qui est de classe $C^1$ sur $\left[-1, 0\right]$, bijectif de $\left[-1,0\right]$ sur $\left[0,1\right]$, et on trouve : $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{e^{(1-u)x}}{\sqrt{u(2-u)}}\, du = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\, du$

Conclusion :

$$\boxed{\int_{-1}^0 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\, du}$$

**b)** Pour tout $u$ de $\left[0,1\right]$, on a $\dfrac{u}{2}$ élément de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, et d'après la question 2b) :

$$1 \le \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \le 1 + \frac{u}{2}$$

En multipliant par $\dfrac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}}$ positif, on obtient : $\displaystyle\frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}} \le \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}} \le (1+\frac{u}{2})\frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}}$.

En intégrant de 0 à 1, on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}}\, du \le \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\, du \le \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}}(1+\frac{u}{2})\, du$.

En développant dans l'intégrale de droite, on trouve :

$$\int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}}\, du \le \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\, du \le \int_0^1 \frac{e^{-u\,x}}{\sqrt{u}}\, du + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-u\,x}\sqrt{u}\, du \qquad (*)$$

D'après la question 3b), on a : $\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ et $\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}$.

En divisant l'encadrement ($*$) ci-dessus par $\sqrt{\frac{\pi}{x}} > 0$, on a :

$$\frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \leq \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \leq \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} + \frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{2\sqrt{\frac{\pi}{x}}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{2\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}}}{2\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{8x} = 0$, on obtient par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = 1$.

Par définition, ceci veut dire que $\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

Comme $\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}\,du$, on a finalement :

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}}$$

Pour finir, par définition de $I(x)$, on a : $I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

La première intégrale est bornée d'après la question 2a) et la deuxième tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ (d'après le dernier résultat encadré et grâce aux croissances comparées).
Par conséquent, la première intégrale est négligeable devant la deuxième au voisinage de $+\infty$ et on en conclut : $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

Par transitivité de l'équivalence, on obtient :

$$\boxed{I(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}}$$

### *Partie 3*

**1)** Avec le système complet d'événements $(X = k)_{k\in\mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales s'écrit : $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big([X=Y]\cap[X=k]\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big([Y=k]\cap[X=k]\big)$.

Par indépendance de $X$ et $Y$, on obtient : $P(X=Y)=\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k)$.

En remplaçant la valeur des probabilités, on a :

$$\boxed{P(X=Y)=e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}}$$

**2) a)** Comme $t$ est élément de $[-1, 1]$, deux cas se présentent :

- Soit $t \le 0$ et on a $0 \le u \le -tx \le x$ (la dernière inégalité provient de $-t \le 1$ et $x \ge 0$).
- Soit $t \ge 0$ et on a $-x \le -tx \le u \le 0$ (la première inégalité provient de $-t \ge -1$ et $x \ge 0$).

Finalement : pour tout $u$ entre 0 et $-tx$, on a : $-x \le u \le x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\boxed{e^u \le e^x}$$

En notant $h$ la fonction $u \mapsto e^u$, on a : $h^{(2n+1)}(u)=e^u$ et $\left|h^{(2n+1)}(u)\right|=e^u$. D'après ce qui précède, on obtient : $\left|h^{(2n+1)}(u)\right| \le e^x$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre $2n$, appliquée à la fonction $h$, entre 0 et $-tx$ s'écrit alors :

$$\boxed{\left|e^{-tx}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k t^k x^k}{k!}\right| \le e^x\frac{|t|^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

**b)** L'intégrale $J=\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est impropre en 1. On effectue le changement de variable $u=s^{-1}(t)$, où l'on a désigné par $s$ la restriction de la fonction sinus à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction $s^{-1}$ est bien de classe $C^1$ sur $[0, 1[$ et est une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc : $t=\sin u$, $dt=\cos u\,du$ et $\sqrt{1-t^2}=\cos u$.

Dès lors on obtient : $J=\int_0^{\pi/2}(\sin u)^k\,du$ et on a bien :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=u_k}$$

**c)** En divisant les deux membres de l'inégalité obtenue à la question 2a) de cette partie par $\sqrt{1-t^2}$ qui est strictement positif (ce qui explique que l'on peut "rentrer" $\sqrt{1-t^2}$ dans la valeur absolue), on trouve : $\left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| \le e^x\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}$.

En intégrant de –1 à 1, bornes dans l'ordre croissant, on a :

$$\int_{-1}^1\left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt \le e^x\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_{-1}^1\frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et la linéarité de l'intégration, on trouve :

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \right| \leq e^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt .$$

• Si $k$ est pair, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est paire donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge et, d'après la question 2b), on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\int_{0}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2u_k$.

• Si $k$ est impair, alors $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est impaire donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge et est nulle.

Par conséquent, les termes impairs de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ sont nuls et il reste :

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \int_{-1}^{1} \frac{t^{2i}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \right| \leq e^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

En divisant par $\pi$, on obtient :

$$\left| I(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\, 2u_{2i} \right| \leq \frac{e^x}{\pi} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Pour terminer, la fonction $t \mapsto \dfrac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}$ étant paire, on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\int_{0}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\int_{0}^{1} \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2u_{2n+1}$$

En conclusion : $\left| I(x) - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(2i)!} 2u_{2i} \right| \leq 2e^x \dfrac{x^{2n+1}}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}$.

En remplaçant $u_{2i}$ par son expression, il reste :

$$\boxed{\left| I(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(i!)^2 2^{2i}} \right| \leq \frac{2x^{2n+1} e^x}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}}$$

**d)** La série exponentielle converge donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, ce qui assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ (suite extraite d'une suite convergente). Par ailleurs, on a vu à la question 5) que $u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}}$, ce qui prouve que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.

Tout ceci montre, par encadrement (une valeur absolue est positive), que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| I(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{(i!)^2 2^{2i}} \right| = 0$$

On peut alors écrire :

$$\boxed{I(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i}}{(i!)^2 2^{2i}}}$$

**3)** D'après la question 1) de cette partie, on a : $P(X=Y)=e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{\left(k!\right)^2}=e^{-2\lambda}I(2\lambda)$.

Grâce à la question 4b) de la partie 2, avec $x=2\lambda$, on a $I(2\lambda)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{2\lambda}}{2\sqrt{\pi\lambda}}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{P(X=Y)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}}$$

# EDHEC 2013

## RAPPORT DU JURY
## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Concours d'admission sur classes préparatoires**
**<u>Option scientifique</u>**

### Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant, cette année, une place importante à l'analyse.
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.
Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet équilibré, bien construit, progressif dans la difficulté et bien adapté au public. Ils ont pu apprécier très précisément les connaissances des candidats, mais aussi leurs capacités à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leurs capacités à raisonner, ce qui est le premier but d'un texte de concours.
Les candidats les moins sérieusement préparés ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base (exercice 1 notamment).

• **L'exercice 1** proposait de prouver le résultat suivant : si la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge (avec $a_n > 0$), alors la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ converge également, et de plus, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.
On étudiait deux exemples (dont l'un faisait l'objet d'un programme de calcul) puis le cas général était abordé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournissant un excellent point de départ.

Cet exercice, très technique (il y avait de nombreux calculs difficiles à effectuer) a permis aux candidats solides de clairement se démarquer.

Notons qu'une question sur la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ (qui n'est qu'une question de cours concernant la série exponentielle) a donné lieu à des développements inattendus qui n'ont pas toujours été couronnés de succès.

• **L'exercice 2** présentait un endomorphisme *f* de *E* possédant au moins une valeur propre λ réelle et l'objectif était de démontrer qu'il existait un hyperplan de *E* stable par *f*.
L'exercice commençait par l'étude de deux exemples puis on traitait le cas général grâce à l'endomorphisme $f^*$ adjoint de *f*.

Cet exercice, théorique, a été très discriminant et a permis aux candidats les mieux formés de parfaitement faire la différence. Les correcteurs ont pu mesurer à quel point les connaissances en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire de très nombreux candidats sont fragiles, surtout dès que les questions posées sortent de l'ordinaire.

Remarquons, ici aussi, qu'une question facile, comme celle consistant à montrer qu'une matrice possède les mêmes valeurs propres que sa transposée, a été traitée correctement par moins de 10% des candidats.

• **L'exercice 3** portant sur la partie "variables à densité" du programme de probabilités, avait pour premier objectif d'étudier une variable aléatoire $X$ de densité la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite considérait une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, admettant toutes $f$ comme densité, et proposait de démontrer que la suite de variables $(Y_n)$ où $Y_n = \dfrac{\text{Sup}(X_1,\ldots,X_n)}{n}$ convergeait en loi vers une variable aléatoire dont l'inverse suit une loi exponentielle.

Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement très peu de connaissance sur cette partie portant exclusivement sur le programme de seconde année.

Là encore, la superficialité des connaissances de nombreux candidats les a conduits à trouver des fonctions de répartition farfelues qu'une petite vérification aurait permis de rectifier.

• **Le problème**, portant lui aussi sur le programme de probabilité, avait pour but de démontrer que, si deux variables aléatoires $X$ et $Y$ définies sur un espace probabilisé ($\Omega$, $\mathcal{A}$, $P$), sont indépendantes, et suivent toutes les deux la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ désigne un réel strictement positif, alors on a :

$$P(X = Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$$

Ce problème, calculatoire et technique, a été très sélectif en permettant de tester la fiabilité des candidats face au calcul de l'intégrale de Wallis $u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt$, face à l'obtention d'un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$, face à des problèmes de convergence d'intégrales impropres et face à l'utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Une question usuelle (établir pour tout $u$ de $[0, 1/2]$ l'inégalité $\dfrac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1+u$) a donné lieu a trop peu de réponses correctes, alors qu'il suffisait d'élever au carré pour s'en sortir sans dommage.

## Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3609 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,312 sur 20 (supérieure de 0,36 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 6,036 (légèrement supérieur à celui de l'année dernière).

• 34% des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (14% ont une note inférieure à 4). Le nombre de copies très faibles (note inférieure à 4) est en très légère augmentation par rapport à l'année dernière (1,5%).

• 20% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.

• 28% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

**Conclusion :**

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées, bien rédigées et agréables à lire pour les meilleures, contrairement à une minorité, difficiles à lire, et dont la présentation et l'écriture sont jugées exécrables, par un bon nombre de correcteurs.

Un nombre non négligeable de candidats sont adeptes des réponses floues, comme par exemple (exercice 3, première question) celle consistant à écrire « la fonction $f$ est continue par morceaux » sans préciser en quels points cette fonction n'est (peut-être) pas continue. Il faut savoir que ce type de réponse est sanctionné et que l'absence d'argument ou le manque de précision peut rendre la réponse irrecevable.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.