EDHEC BUSINESS SCHOOL

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES
Option scientifique

5 mai 2015 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document, seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

1) Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire la valeur de I_1.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

5) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

b) Calculer J_0.

6) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$ en fonction de J_n.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.

7) À l'aide des questions 4a) et 6a), compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure ou égale à 2 :')
I = log(2) ; J = 1/2 ; J = ------
for k = 2:n
I = ------ ; J = ------ ; end
disp(I, 'la valeur de I est :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.
On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

1) a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.

b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.

c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$$

b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3) a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y.

b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.

4) Écrire une commande `Scilab` permettant de simuler la variable aléatoire Z.

5) On considère les commandes `Scilab` suivantes :

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
w = grand(1,n,'exp',1)
s = sum(w.*sqrt(w))/n/sqrt(%pi)
```

a) En remarquant que $x^2 g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}e^{-x}$, montrer que `s` contient une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.

b) On admet que $E(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Exercice 3

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire canonique de x et y.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1) Justifier l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, ..., u_n)$, formée de vecteurs propres de f.

2) a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $\langle x, f(x) \rangle \geq 0$.

b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x) \rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.

c) En déduire que l'application φ, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3) a) En utilisant $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.

b) Établir que g est bijectif.

c) Montrer que la famille $(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), ..., g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.

2) a) Donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{r+2} x^n$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_n \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

3) Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.

a) Donner la valeur de S_0.

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x) S_{r+1} = x S_r$.

c) En déduire :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall r \in \mathbb{N},\ \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

d) Donner enfin la valeur de $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$.

Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et il perd un euro avec la probabilité $1-p$.

Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié et on suppose que les manches jouées sont jouées de façon indépendante.
On note :
- X le nombre de manches auxquelles a participé ce joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par ce joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires, définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Donner la loi de X (on pourra noter D_k l'événement « le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »).

b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable T puis en déduire que l'on a :

$$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

c) En déduire également la valeur de $V(X)$.

2) a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = n)$.

b) En déduire, à l'aide de la partie 1, la loi de Y.

3) Calculer l'espérance de Y puis montrer que $V(Y) = \dfrac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

4) a) Exprimer G en fonction de X et Y.

b) En déduire l'espérance de G.

c) On admet l'existence de $E(XY)$. Établir que $E(XY) = \dfrac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}$.

d) En déduire la variance de G.

5) a) Compléter, en utilisant la fonction `grand`, les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y.

```
alpha = input('entrez la valeur de alpha :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = ------
Y = ------
disp(X)
disp(Y)
```

b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour que la valeur prise par G soit calculée et affichée ?

Corrigé

Exercice 1

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et, on a $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$ et comme $n+1 \geq 2 > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{n+1}}$ converge et, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, on peut conclure :

$$\boxed{I_n \text{ est une intégrale convergente}}$$

2) a) On a les équivalences suivantes (valables pour tout x différent de -1 et 0) :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)-bx}{x(x+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a-b)x+a}{x(x+1)}.$$

Par identification des coefficients au numérateur, on obtient : $\begin{cases} a-b=0 \\ a=1 \end{cases}$.

En conclusion, on trouve $a=b=1$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$$

b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^A = \ln A - \ln(A+1) + \ln 2.$$

Pour terminer, $\lim\limits_{A\to+\infty} (\ln A - \ln(A+1)) = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln\dfrac{A}{A+1} = 0$ d'où, après passage à la limite :

$$\boxed{I_1 = \ln 2}$$

3) a) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a $x+1 \geq 2$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $[2,+\infty[$, on obtient : $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}$. Comme tout est positif, on peut écrire $0 \leq \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}$, et en multipliant par $\dfrac{1}{x^n} \geq 0$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}$$

Il reste à intégrer de 1 à A, avec $A \geq 1$ (bornes dans l'ordre croissant) et on trouve : $0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n\left(x+1\right)} dx \leq \frac{1}{2}\int_1^A \frac{1}{x^n} dx$.

Ceci donne : $0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n\left(x+1\right)} dx \leq \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\left(n-1\right)x^{n-1}}\right]_1^A$

On a donc : $0 \leq \int_1^A \frac{1}{x^n\left(x+1\right)} dx \leq \frac{1}{2\left(n-1\right)}\left(1-\frac{1}{A^{n-1}}\right)$.

Comme $n \geq 2$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{n-1}} = 0$ et, après passage à la limite :

$$\boxed{\forall n \geq 2\,,\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}}$$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n-1)} = 0$, on obtient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

4) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)}$. Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right)dx = \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}dx$$

On a déjà vu que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}dx$ était convergente et de plus, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{x^{n+1}}dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{-1}{nx^n}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{A^n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Finalement :

$$\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}}$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} - \frac{1}{x^n(x+1)}\right)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}dx$$

Comme $x \geq 1$, on a $\frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leq 0$, et ainsi $I_{n+1} - I_n$ est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant, d'une fonction négative donc : $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

c) Grâce à la décroissance de la suite (I_n), on a $I_n \geq I_{n+1}$ d'où l'on tire $2I_n \geq I_n + I_{n+1}$, et comme, avec la question 4a), on sait que $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n}$, on en déduit : $I_n \geq \dfrac{1}{2n}$.

D'après la question 3b), on sait que $I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$ et en regroupant ces deux dernières inégalités, on trouve :

$$\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

En multipliant par $2n > 0$, on trouve : $1 \leq 2nI_n \leq \dfrac{n}{n-1}$. Par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$, ce qui signifie :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente donc, grâce au critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } I_n \text{ diverge}}$$

5) a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et, on a $\dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+2}}$ et comme $n+2 \geq 2 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+2}}$ converge et, grâce au critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues et positives, on peut conclure :

$$\boxed{J_n \text{ est une intégrale convergente}}$$

b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1}$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{A+1} = 0$, on a, après passage à la limite :

$$\boxed{J_0 = \frac{1}{2}}$$

6) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $J_k + J_{k-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k (x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{k-1}(x+1)^2}$. Par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$J_k + J_{k-1} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^k (x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2} \right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k (x+1)^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k (x+1)} dx .$$

On a donc :

$$\boxed{J_k + J_{k-1} = I_k}$$

b) De l'égalité précédente, on tire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(J_k + J_{k-1} \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} J_i$$

En écrivant $\left(-1\right)^i = -\left(-1\right)^{i-1}$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} J_i$.

Par télescopage, on trouve : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + J_0$. Comme $J_0 = \frac{1}{2}$, on a finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = (-1)^{n-1} J_n + \frac{1}{2}}$$

c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a $x+1 \geq 2$ donc $\left(x+1\right)^2 \geq 4$, par stricte positivité de $\left(x+1\right)^2$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $0 \leq \frac{1}{\left(x+1\right)^2} \leq \frac{1}{4}$.

En multipliant par $\frac{1}{x^n} \geq 0$, on trouve : $0 \leq \frac{1}{x^n \left(x+1\right)^2} \leq \frac{1}{4x^n}$.

Le calcul est le même qu'à la question 3a) où l'on a montré que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1}$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}}$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4(n-1)} = 0$, on en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = 0}$$

d) D'après la question 6b), on a : $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k = (-1)^{n-1}J_n + \frac{1}{2}$

On en déduit : $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k - \frac{1}{2}\right| = \left|(-1)^{n-1}J_n\right| = J_n$, car J_n est positif.

Comme $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k - \frac{1}{2}\right) = 0$, ce qui prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k = \frac{1}{2}$$

Ceci signifie que la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ est convergente et sa somme est :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}I_k = \frac{1}{2}}$$

7) Les commandes `Scilab`, une fois complétées, sont les suivantes :

```
J = I-J // calcul de J1
for k = 2:n
I = 1/(k-1)-I // calcul de In
J = I-J // calcul de Jn
end
```

Pour la deuxième ligne, on a utilisé le fait que $J_1 = I_1 - J_0$.

Pour la troisième ligne, on a utilisé le fait que $I_k = \frac{1}{k-1} - I_{k-1}$ et que $J_k = I_k - J_{k-1}$.

Exercice 2 ....

1) a) Pour tout réel *x* positif ou nul, on a :

$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x)$

Comme $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ F_Y(x) = 2\Phi(x) - 1}$$

Comme *Y* prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a : $\forall x < 0$, $F_Y(x) = 0$.

On peut donc définir F_Y sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(x) - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

• La fonction F_Y est de classe C^1 (donc continue) sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ puisqu'elle est nulle sur $]-\infty,0[$, alors que sur $]0,+\infty[$, c'est une fonction affine de Φ, elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0,+\infty[$.

• En 0, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = 2\Phi(0) - 1 = 0$ donc F_Y est continue en 0.

Bilan : la fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, donc :

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$$

On trouve une densité f_Y de Y en dérivant F_Y, sauf en 0, ce qui donne :

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 2\varphi(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

En posant $f_Y(0) = 2\varphi(0)$, on a une densité f_Y de Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 2\varphi(x) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

b) Comme f_Y est nulle sur $]-\infty,0[$, on a $\int_{-\infty}^{0} x\, f_Y(x)dx = 0$.

D'autre part, on a, pour tout A positif :

$$\int_0^A x\, f_Y(x)dx = 2\int_0^A x\,\varphi(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^A x\, e^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A.$$

$$\int_0^A x\, f_Y(x)dx = = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - e^{-A^2/2}\right).$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-A^2/2} = 0$, on conclut que $\int_0^{+\infty} x\, f_Y(x)dx$ est convergente, et après passage à la limite, on trouve :

$$\boxed{E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}}$$

c) On a $Y^2 = |X|^2 = X^2$ et comme X^2 a une espérance qui vaut 1, on est sûr que Y^2 en a une aussi et on a : $E(Y^2) = 1$.

Grâce au théorème de Koenig-Huygens, on sait que $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$ et on trouve :

$$\boxed{V(Y) = 1 - \frac{2}{\pi}}$$

2) a) La fonction $t \mapsto \sqrt{2t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le changement de variable $u = \sqrt{2t}$ est licite et, comme $t = \dfrac{u^2}{2}$ et $dt = u\,du$, il fournit :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{\pi \frac{u^2}{2}}} u\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{u^2}} u\,du$$

En simplifiant, on a (u est positif donc $\sqrt{u^2} = u$) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du}$$

b) La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (sa restriction à cet intervalle est la fonction nulle) et sur $\mathbb{R}_+^*$ (sa restriction à cet intervalle est le quotient bien défini de deux fonctions continues), elle est positive (la fonction nulle l'est et les fonctions exponentielle et racine carrée aussi).
Pour finir, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} g(t)dt$ est nulle (car g est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et, d'après la question précédente, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$ converge (référence à la loi normale centrée réduite pour laquelle on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$), l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge également et on a :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$$

La deuxième égalité est justifiée par la parité de la fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$.
La troisième égalité est justifiée par le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1$ (loi normale centrée réduite).
Conclusion :

$$\boxed{g \text{ peut être considérée comme une densité}}$$

3) a) On a $T = \sqrt{2Z}$ et Z prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
De plus, en notant F_T la fonction de répartition de T, on a :

$$\forall x > 0,\ F_T(x) = P(T \le x) = P\left(\sqrt{2Z} \le x\right)$$

La fonction $t \mapsto t^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on a, en élevant au carré : $\forall x > 0,\ F_T(x) = P(2Z \le x^2) = P\left(Z \le \dfrac{x^2}{2}\right) = G\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.
Comme $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, on a aussi : $\forall x \le 0,\ F_T(x) = 0$.

En dérivant $F_T(x)$, sauf en 0, on obtient : $F_T'(x)=\begin{cases} xg\left(\dfrac{x^2}{2}\right) \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x<0 \end{cases}$.

En posant $f_T(0)=0$, on a une densité f_T de T définie par :

$$f_T(x)=\begin{cases} x\dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi\dfrac{x^2}{2}}} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En arrangeant un peu, on obtient :

$$f_T(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-x^2/2} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On constate que les fonctions f_T et f_Y ne diffèrent qu'en 0 donc :

$$\boxed{T \text{ suit la même loi que } Y}$$

b) On a $Z=\dfrac{T^2}{2}$ et T possède un moment d'ordre 2 (puisque Y qui a la même loi que T en possède un) donc Z possède une espérance et, par linéarité de l'espérance, on trouve : $E(Z)=\dfrac{1}{2}E(T^2)=\dfrac{1}{2}E(Y^2)$

On a vu que $E(Y^2)=1$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{E(Z)=\frac{1}{2}}$$

4) Comme $Z=\dfrac{T^2}{2}$ et comme T suit la même loi que Y, alors Z suit la même loi que $\dfrac{Y^2}{2}$. Comme de plus, $\dfrac{Y^2}{2}=\dfrac{X^2}{2}$, il suffit de simuler $\dfrac{X^2}{2}$ pour simuler Z.

La commande `Scilab` demandée est donc la suivante :

```
Z = grand(1,1,'nor',0,1)^2/2
```

5) a) Pour tout x strictement positif, on a $x^2g(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}e^{-x}$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2g(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x\sqrt{x}e^{-x}dx$$

On peut alors considérer que $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} E\left(W\sqrt{W}\right)$, où W suit la loi exponentielle de paramètre 1. D'après le cours d'estimation, en notant $(W_1,...,W_n)$ un échantillon de la loi de W, la moyenne empirique $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k\sqrt{W_k}$ est un estimateur sans biais et convergent de $E\left(W\sqrt{W}\right)$.

Une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{\pi}} E\left(W\sqrt{W}\right)$ est donnée par $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k\sqrt{w_k}$, où les w_k sont des réalisations des variables $W_1,...,W_n$, ceci pour une valeur de n assez grande.

Les commandes proposées permettent donc d'obtenir une valeur approchée, pour n assez grand, de $E(Z^2) = \int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx$.

b) Comme $Z^2 = \frac{T^4}{4}$, on a : $E(Z^2) = \frac{1}{4}E(T^4) = \frac{1}{4}E(Y^4) = \frac{1}{4}E(X^4)$

On a admis que $E(X^4) = 3$ donc la valeur exacte de $E(Z^2)$ est :

$$\boxed{E(Z^2) = \frac{3}{4}}$$

Exercice 3 ....

1) Comme f est un endomorphisme symétrique, il est "ortho-diagonalisable" et ainsi, il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, que l'on notera $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, ..., u_n)$, composée de vecteurs propres de f.

2) a) Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, il existe des réels $\alpha_1,...,\alpha_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ et on a, par linéarité de f : $\left\langle x, f(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(u_j) \right\rangle$. Comme les u_j sont des vecteurs propres de f, on obtient, en notant λ_j la valeur propre associée à u_j :

$$\left\langle x, f(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j u_j \right\rangle$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on a alors : $\left\langle x, f(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_j \left\langle u_i, u_j \right\rangle$.

Comme la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est orthonormale, les produits scalaires sont tous nuls sauf pour $j = i$ et comme $\left\langle u_i, u_i \right\rangle = \| u_i \|^2 = 1$, il reste $\left\langle x, f(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i$.

Par hypothèse, les valeurs propres de f sont positives donc on peut conclure :

$$\boxed{\left\langle x, f(x) \right\rangle \geq 0}$$

b) D'après le calcul précédent, on a $\left\langle x, f(x) \right\rangle = 0$ si et seulement si : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i^2\,\lambda_i = 0$ (car une somme de termes positifs n'est nulle que si chaque terme est nul). Comme les valeurs propres λ_i sont toutes strictement positives, on obtient : $\left\langle x, f(x) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i^2 = 0$.

En simplifiant : $\left\langle x, f(x) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i = 0$.

Ceci veut dire :

$$\boxed{\left\langle x, f(x) \right\rangle = 0 \text{ si, et seulement si : } x = 0}$$

c) • Par définition d'un produit scalaire, φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• On a $\varphi(x,y) = \left\langle x, f(y) \right\rangle$ donc $\varphi(y,x) = \left\langle y, f(x) \right\rangle = \left\langle f(x), y \right\rangle$ et, comme *f* est un endomorphisme symétrique, on a : $\varphi(y,x) = \left\langle x, f(y) \right\rangle = \varphi(x,y)$.

Ainsi, φ est symétrique.

• La linéarité à gauche de φ découle de celle du produit scalaire et par symétrie, φ est donc bilinéaire.

• D'après la question 2a), φ est positive et avec la question 2b), on est certain que φ est définie positive.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n}$$

3) a) Soit *g* l'endomorphisme défini par : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ g(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\,u_i$.

Remarque. L'endomorphisme *g* est bien défini puisque l'on donne les images des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^n$.

• On a bien :

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ (g \circ g)(u_i) = g(g(u_i)) = g\left(\sqrt{\lambda_i}\,u_i\right) = \sqrt{\lambda_i}\left(\sqrt{\lambda_i}\,u_i\right) = \lambda_i\,u_i = f(u_i)$.

Les endomorphismes g^2 et *f* coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$ donc ils sont égaux.

• Comme les valeurs propres λ_i de *f* sont strictement positives, il en est de même des valeurs propres $\sqrt{\lambda_i}$ de *g*.

• Il reste à montrer que *g* est symétrique pour le produit scalaire canonique.

La matrice de *g* dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est diagonale, donc symétrique, ce qui fait que *g* est un endomorphisme symétrique.

b) D'après la question 3a), 0 n'est pas valeur propre de *g* donc on peut conclure :

$$\boxed{g \text{ est bijectif}}$$

c) Calculons, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ le produit scalaire $\varphi\left(g^{-1}(e_i)\,,\,g^{-1}(e_j)\right)$. Par définition de φ, on a :

$\varphi\left(g^{-1}(e_i)\,,\,g^{-1}(e_j)\right)=\left\langle g^{-1}(e_i)\,,\,f\left(g^{-1}(e_j)\right)\right\rangle=\left\langle g^{-1}(e_i)\,,\,g^2\left(g^{-1}(e_j)\right)\right\rangle$.

En simplifiant, on trouve : $\varphi\left(g^{-1}(e_i)\,,\,g^{-1}(e_j)\right)=\left\langle g^{-1}(e_i)\,,\,g(e_j)\right\rangle$.

Comme g est symétrique pour le produit scalaire canonique, on a :

$$\left\langle g^{-1}(e_i)\,,\,g(e_j)\right\rangle=\left\langle g\left(g^{-1}(e_i)\right),\,e_j\right\rangle=\left\langle e_i\,,\,e_j\right\rangle$$

On obtient alors :

$$\varphi\left(g^{-1}(e_i)\,,\,g^{-1}(e_j)\right)=\left\langle e_i\,,\,e_j\right\rangle$$

Comme $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, on a :

$$\varphi\left(g^{-1}(e_i)\,,\,g^{-1}(e_j)\right)=\begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

On peut donc affirmer que $(g^{-1}(e_1),\ g^{-1}(e_2),\ ...,\ g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ, en tant que famille orthonormale contenant n vecteurs d'un espace de dimension n.

Problème ....

Partie 1

1) On a $\binom{n}{r}=\dfrac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}$ et, comme chaque facteur du numérateur est équivalent à n (r est fixé), on obtient :

$$\boxed{\binom{n}{r}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^r}{r!}}$$

2) a) Comme $x\in\,]0,1[$, on a (c'est un résultat du cours sur les croissances comparées) :

$$\boxed{\forall x\in\,]0,1[,\ \lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n=0}$$

Pour la "culture", une démonstration de ce résultat peut se faire de la façon suivante :

On a : $n^{r+2}x^n=n^{r+2}e^{n\ln x}=\dfrac{1}{(\ln x)^{r+2}}(n\ln x)^{r+2}\,e^{n\ln x}$.

En posant $X=n\ln x$, on obtient alors (comme $\ln x<0$) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n=\dfrac{1}{(\ln x)^{r+2}}\lim\limits_{X\to-\infty} X^{r+2}e^X=0$ (croissances comparées plus "classiques").

b) D'après la première question, on a : $n^2\binom{n}{r}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{r!}n^{r+2}x^n$.

Grâce à la question 2a), on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\binom{n}{r}x^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{r!}n^{r+2}x^n = 0$.

Ceci implique que : $\binom{n}{r}x^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2>1$), on en déduit, avec le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \binom{n}{r}x^n \text{ est convergente}}$$

3) a) On a $S_0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{0}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n = \dfrac{1}{1-x}$, puisque $|x|<1$.

b) On a aussi $(1-x)S_{r+1} = (1-x)\sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n = \sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n - \sum\limits_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1}$.

En posant $k=n+1$ dans la deuxième somme, on obtient :

$$(1-x)S_{r+1} = \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n - \sum_{k=r+2}^{+\infty}\binom{k-1}{r+1}x^k$$

En isolant le terme d'indice $r+1$ de la première somme, on a :

$$(1-x)S_{r+1} = x^{r+1} + \sum_{n=r+2}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n - \sum_{k=r+2}^{+\infty}\binom{k-1}{r+1}x^k$$

En regroupant les sommes restantes, on trouve :

$$(1-x)S_{r+1} = x^{r+1} + \sum_{n=r+2}^{+\infty}\left(\binom{n}{r+1}-\binom{n-1}{r+1}\right)x^n$$

Grâce à la relation de Pascal, on obtient :

$$(1-x)S_{r+1} = x^{r+1} + \sum_{n=r+2}^{+\infty}\binom{n-1}{r}x^n$$

Le changement d'indice $k=n-1$ donne alors :

$$(1-x)S_{r+1} = x^{r+1} + \sum_{k=r+1}^{+\infty}\binom{k}{r}x^{k+1}$$

En ajoutant et retranchant le terme d'indice r de la somme, on en déduit :

$$(1-x)S_{r+1} = x^{r+1} + \sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^{k+1} - x^{r+1} = \sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^{k+1} = x\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^k$$

On a bien :

$$\boxed{(1-x)S_{r+1} = xS_r}$$

c) D'après ce qui précède, comme $1-x$ n'est pas nul, on a $S_{r+1}=\dfrac{x}{1-x}S$, ce qui montre que la suite (S_r) est géométrique de raison $\dfrac{x}{1-x}$. Son premier terme est $S_0=\dfrac{1}{1-x}$ donc on en déduit : $\forall x\in\,]0,1[\,,\ \forall r\in\mathbb{N}\,,\ S_r=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^r\times\dfrac{1}{1-x}$.
En d'autres termes :

$$\boxed{\forall x\in\,]0,1[\,,\ \forall r\in\mathbb{N}\,,\ \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n=\frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}}$$

d) En divisant par x^r qui est strictement positif donc différent de 0, on en déduit :

$$\boxed{\forall x\in\,]0,1[\,,\ \forall k\in\mathbb{N}\,,\ \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r}=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}}$$

Partie 2

1) a) En notant D_k l'événement « le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche », on a :

- $(X=0)=D_1$ donc $P(X=0)=\alpha$.
- Pour tout entier naturel n non nul : $(X=n)=\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\ldots\cap\overline{D_n}\cap D_{n+1}$. On a alors : $P(X=n)=P\left(\overline{D_1}\right)P_{\overline{D_1}}\left(\overline{D_2}\right)P_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}}\left(\overline{D_3}\right)\ldots P_{\overline{D_1}\cap\ldots\cap\overline{D_{n-1}}}\left(\overline{D_n}\right)P_{\overline{D_1}\cap\ldots\cap\overline{D_n}}\left(D_{n+1}\right)$

On en déduit, d'après la règle du jeu : $P(X=n)=(1-\alpha)^n\alpha$.
La dernière formule restant valable pour $n=0$, on peut résumer :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=(1-\alpha)^n\alpha}$$

b) Comme $T=X+1$, on a $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$. De plus, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(T=k)=P(X+1=k)=P(X=k-1)=(1-\alpha)^{k-1}\alpha$$

On peut conclure :

$$\boxed{T\text{ suit la loi géométrique de paramètre }\alpha}$$

D'après le cours, on a $E(T)=\dfrac{1}{\alpha}$ et comme $X=T-1$, on en déduit que X a une espérance et : $E(X)=E(T-1)=E(T)-1=\dfrac{1}{\alpha}-1$. En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{E(X)=\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

c) De même, comme T a une variance, X en a une aussi et :

$$V(X) = V(T-1) = 1^2 V(T) = V(T)$$

En remplaçant, on obtient :

$$\boxed{V(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}}$$

2) a) Comme les manches sont jouées de façon indépendante et comme elles donnent lieu au succès du joueur avec la probabilité p, la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, ceci restant valable même si $n = 0$. On en déduit :

$$\boxed{P_{(X=n)}(Y = r) = \begin{cases} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \text{ si } 0 \le r \le n \\ 0 \text{ si } n < r \end{cases}}$$

b) Comme le nombre de manches jouées est un entier naturel, alors le nombre de manches gagnées aussi et on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

En écrivant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, ces événements étant tous de probabilités non nulles, on obtient :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ P(Y = r) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P_{(X=n)}(Y = r)$$

Si $r > n$, la probabilité $P_{(X=n)}(Y = r)$ est nulle (on ne peut pas obtenir plus de succès que de manches jouées) et il reste :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ P(Y = r) = \sum_{n=r}^{+\infty} P(X = n) P_{(X=n)}(Y = r)$$

En remplaçant chacune des probabilités par sa valeur, on trouve :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ P(Y = r) = \sum_{n=r}^{+\infty} (1-\alpha)^n \alpha \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \alpha p^r \sum_{n=r}^{+\infty} (1-\alpha)^n \binom{n}{r} (1-p)^{n-r}$$

En écrivant $(1-\alpha)^n = (1-\alpha)^r (1-\alpha)^{n-r}$, on a :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ P(Y = r) = \alpha p^r (1-\alpha)^r \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} (1-\alpha)^{n-r} (1-p)^{n-r}$$

Pour finir, on a $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} (1-\alpha)^{n-r} (1-p)^{n-r} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} \big((1-\alpha)(1-p)\big)^{n-r}$

Comme α et p sont dans $]0,1[$, on est certain que $(1-\alpha)(1-p)$ appartient à $]0,1[$ et on peut appliquer la formule montrée dans le préliminaire (avec $x = (1-\alpha)(1-p)$, ce qui donne :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} \big((1-\alpha)(1-p)\big)^{n-r} = \frac{1}{\big(1-(1-\alpha)(1-p)\big)^{r+1}}$$

En reportant dans l'expression de $P(Y=r)$, on obtient :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}\,,\ P(Y=r)=\frac{\alpha\big(p(1-\alpha)\big)^r}{(\alpha+p-\alpha p)^{r+1}}}$$

3) • On peut écrire :

$$\forall r \in \mathbb{N}\,,\ P(Y=r)=\left(\frac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}\right)^r \frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}=\left(\frac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}\right)^r\left(1-\frac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}\right)$$

On constate alors que Y suit une loi du même type que celle suivie par X, mais en remplaçant α par $\beta=\dfrac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}$ et bien sûr, $1-\alpha$ par $1-\beta=\dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}$.

On montre, pour commencer, que $\beta\in\,]0,1[$:

On a $\beta=\dfrac{\alpha}{\alpha+p(1-\alpha)}$, ce qui permet d'assurer que :

• $\beta>0$ puisque $\alpha>0$ et $p(1-\alpha)>0$ puisque $p>0$ et $\alpha<1$.

• $\beta<1$ puisque $\alpha<\alpha+p(1-\alpha)$.

En conclusion : $\beta\in\,]0,1[$.

• Espérance de Y.

On a donc : $E(Y)=\dfrac{1-\beta}{\beta}=\dfrac{\dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}}{\dfrac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}}$

Conclusion :

$$\boxed{E(Y)=\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}}$$

Remarque. Après une petite justification, on pouvait utiliser la formule de l'espérance totale. Puisque la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on a $E(Y\mid[X=n])=np$ et ensuite, on obtient :

$E(Y)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P(X=n)E(Y\mid[X=n])=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha(1-\alpha)^n np=\alpha p\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(1-\alpha)^n$. Comme le premier terme est nul, on peut écrire : $E(Y)=\alpha p\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(1-\alpha)^n$ et en mettant $1-\alpha$ en facteur, on retrouve bien : $E(Y)=\alpha p(1-\alpha)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(1-\alpha)^{n-1}=\dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha}$.

• Variance de Y.

De même, toujours en référence à la loi suivie par X en remplaçant α par β, on a :

$$V(Y)=\frac{1-\beta}{\beta^2}=\frac{E(Y)}{\beta}=\frac{\dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}}$$

Finalement :

$$\boxed{V(Y)=\frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}}$$

4) a) Le joueur gagne un euro pour chaque manche gagnée (et il y a Y manches gagnées) et perd un euro pour chaque manche perdue (et il y a $X-Y$ manches perdues) donc : $G=Y\times 1+(X-Y)\times(-1)$.

Conclusion :

$$\boxed{G=2Y-X}$$

b) Toujours par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(G)=E(2Y-X)=2E(Y)-E(X)$$

En remplaçant par les valeurs déjà obtenues, on obtient :

$$E(G)=2\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}-\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

En arrangeant, on trouve :

$$\boxed{E(G)=\frac{(1-\alpha)(2p-1)}{\alpha}}$$

c) Comme on admet que $E(XY)$ existe, on a, par définition :

$$E(XY)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{r=0}^{+\infty}n\,r\,P([X=n]\cap[Y=r])=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{r=0}^{n}n\,r\,P(X=n)P_{(X=n)}(Y=r).$$

On peut écrire : $E(XY)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\,P(X=n)\sum_{r=0}^{n}r\,P_{(X=n)}(Y=r)$

On reconnaît dans la somme intérieure l'espérance conditionnelle de Y, sachant que l'événement $(X=n)$ est réalisé, qui vaut np, grâce à la question 2a).

En remplaçant, on obtient : $E(XY)=p\sum_{n=0}^{+\infty}n^2\,P(X=n)$.

On reconnaît maintenant le moment d'ordre 2 de X qui est égal à :

$$V(X)+(E(X))^2=\frac{1-\alpha}{\alpha^2}+\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2=\frac{1-\alpha+(1-\alpha)^2}{\alpha^2}=\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}$$

On a donc :

$$\boxed{E(XY)=\frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}}$$

d) Comme $G = 2Y - X$, on a : $V(G) = V(2Y) + V(X) - 2\,\text{Cov}(X, 2Y)$.

On en déduit : $V(G) = 4V(Y) + V(X) - 4\,\text{Cov}(X,Y)$

La covariance de X et Y existe puisque X et Y ont une espérance et $E(XY)$ existe.

D'après la formule de Huygens, on a : $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

On en déduit : $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2} - \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \times \dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha}$.

En arrangeant, on obtient : $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{p(1-\alpha)\big((2-\alpha)-(1-\alpha)\big)}{\alpha^2} = \dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}$

On a alors successivement :

$$V(G) = \frac{4p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} - \frac{4p(1-\alpha)}{\alpha^2}$$

$$V(G) = \frac{(1-\alpha)\big(4p(p+\alpha-p\alpha)+1-4p\big)}{\alpha^2}.$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{V(G) = \frac{(1-\alpha)\left(4p^2+4p\alpha-4p^2\alpha-4p+1\right)}{\alpha^2}}$$

5) a) On a vu que $T = X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre α et que Y est le nombre de succès obtenus en X épreuves donc les commandes `Scilab` complétées sont :

```
alpha = input('entrez la valeur de alpha :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = grand(1,1,'geom',alpha)-1
Y = grand(1,1,'bin',X,p)
disp(X)
disp(Y)
```

b) Comme $G = 2Y - X$, les commandes à ajouter sont :

```
G = 2*Y-X
disp(G)
```

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2015

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.
• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet moins long que par le passé, mélangeant questions faciles et questions plus difficiles, et bien adapté au public concerné. La présence de questions techniquement difficiles ou abstraites a permis d'évaluer, d'une part les capacités à mener un calcul compliqué à son terme et d'autre part les capacités à raisonner des candidats : ceux d'entre eux qui étaient bien préparés se sont bien démarqués alors que ceux qui l'étaient moins ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base, notamment dans les calculs, parfois même dans les calculs élémentaires.

Description du sujet :

L'exercice 1 proposait l'étude de l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$, de prouver la convergence de la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ et d'en donner la somme. La dernière question demandait de compléter des commandes `Scilab` permettant le calcul de I_n.
• Cet exercice, jugé facile par les correcteurs a permis à tous les candidats, ou presque, de gagner quelques points.
• Notons tout de même que plus de la moitié des candidats n'arrivent pas à encadrer une intégrale rigoureusement, sans parler de ceux (relativement nombreux) qui ne connaissent pas les primitives usuelles.

L'exercice 2, portant sur la partie "variables à densité" du programme de probabilités, présentait une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite et une variable aléatoire Z de densité la fonction g définie par :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x\leq 0\end{cases}$$

L'objectif était d'établir que $|X|$ et $\sqrt{2Z}$ ont même loi. La dernière question demandait d'analyser des commandes `Scilab` et de justifier qu'elles permettent d'obtenir une valeur approchée du moment d'ordre 2 de Z.

• Cet exercice, assez théorique, a permis aux candidats les mieux formés de parfaitement faire la différence. Les correcteurs ont pu mesurer à quel point les connaissances de très nombreux candidats sont fragiles, concernant la manipulation des variables à densité (cours pas maîtrisé pour certains).

• Beaucoup de candidats ont trouvé des fonctions de répartition farfelues, alors qu'une petite vérification aurait permis de les rectifier facilement. La détermination, avant toute chose, du support des variables étudiées aurait permis assez tranquillement d'éviter les fautes les plus graves.

L'exercice 3 portant sur la partie algèbre bilinéaire du programme, avait pour objectif de montrer que, si f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives, alors l'application φ, de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,y)=\langle x,f(y)\rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. La fin proposait la construction d'une base orthonormale pour ce produit scalaire.

• Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement que très peu de connaissances sur cette partie portant exclusivement sur le programme de seconde année. C'est l'exercice le moins bien réussi de cette épreuve.

• Il semble que, pour de très nombreux candidats, tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ soit un vecteur propre de l'endomorphisme f (ceci est, bien sûr, complètement faux et rendait la deuxième question étrangement élémentaire).

Le problème, portant sur le programme d'analyse et de probabilité, démontrait un résultat d'analyse important pour la suite, à savoir : $\forall x\in[0,1[$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r}=\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$. La partie probabilités étudiait un jeu en plusieurs manches pour lequel un joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche suivante (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et il perd un euro avec la probabilité $1-p$. L'objectif était le calcul de l'espérance et de la variance du gain de ce joueur.

La dernière question proposait une simulation informatique de la situation.

• La plupart des candidats n'ont que peu abordé le problème, peut-être par manque de temps ou à cause d'une mauvaise gestion de leur temps. Cela dit, il n'est globalement pas très bien réussi par les candidats qui l'abordent.

• La formule des probabilités totales a donné lieu à quelques écritures fantaisistes.

• Il a été vu à de nombreuses reprises la confusion entre la convergence d'une intégrale (qui d'ailleurs n'était pas impropre) et la convergence d'une série.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3858 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,1 sur 20 (un peu inférieure à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,918 (très légèrement inférieur à celui de l'année dernière).

• 33,8% des candidats, contre 31,4% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 14,1% ont une note inférieure à 4).

• 21% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage sensiblement égal à celui de 2014).

• 26,5% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage inférieur de deux points à celui de 2014).

Conclusion :

L'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. Et ce fossé entre les aspirations du programme et la réalisation sur le « terrain » semble s'être élargi cette année.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées, malgré la présence d'un nombre non négligeable de candidats qui sont adeptes des réponses floues. Il faut savoir que ce type de réponse est sanctionné et que l'absence d'argument ou le manque de précision peut rendre la réponse irrecevable.

Il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon et truffent leur copie d'abréviations non officielles : les correcteurs n'apprécient pas du tout et n'ont alors aucune compassion pour le candidat.

Il semble que l'investissement en informatique ait été un peu moins intense que les années précédentes, ce qui est dommage puisqu'il y avait, comme d'habitude, pas mal de points à glaner sur ces questions, et ceci sans y passer énormément de temps.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.